

*Задача 1.* Доказать, что если два векторных поля касаются подмногообразия, то и их коммутатор касается этого подмногообразия.

*Задача 2.* Опишите все векторные поля на  $\mathbb{R}^3$ , локальный фазовый поток которых сохраняет форму  $dx$ .

*Задача 3.* Опишите все векторные поля на  $\mathbb{R}^3$ , локальный фазовый поток которых сохраняет распределение  $dx = 0$ .

*Задача 4.* а) Докажите, что для любых двух ненулевых внешних 1-форм  $\alpha, \beta$  на конечномерном линейном пространстве  $V$  найдется автоморфизм  $A$  пространства  $V$ , такой что  $A^*\alpha = \beta$ .

б) Пусть  $\alpha, \beta$  дифференциальные 1-формы, отличные от нуля в точке  $a$ . Докажите, что найдется диффеоморфизм  $g$  окрестности точки  $a$ , оставляющий точку  $a$  на месте и такой, что  $g^*\alpha(a) = \beta(a)$ . Приведите пример ненулевых 1-форм  $\alpha, \beta$  для которых не найдется локального диффеоморфизма  $g$ , переводящего одну форму в другую.

*Задача 5.* Пусть  $\alpha$  дифференциальная 1-форма, нигде не обращающаяся в ноль. Какие из следующих условий следуют одно из другого: (1)  $\alpha \wedge d\alpha = 0$ ; (2) дифференциальная 2-форма  $d\alpha$  делится на  $\alpha$ , т.е.  $d\alpha = \alpha \wedge \beta$  для некоторой дифференциальной 1-формы  $\beta$ ; (3) для каждой точки  $x$  ограничение формы  $d\alpha(x)$  на ядро формы  $\alpha(x)$  равно нулю.

*Задача 6.* Рассмотрим распределение касательных гиперплоскостей, заданное 1-формой  $\alpha = dz + a_1(z, x_1, \dots, x_n)dx_1 + \dots + a_n(z, x_1, \dots, x_n)dx_n$  в пространстве с координатами  $z, x_1, \dots, x_n$ . Пусть каждая из функций  $a_i$  обращается в ноль в нуле. Найдите векторные поля  $v_i$ , имеющие вид  $\frac{\partial}{\partial x_i} + f_i \frac{\partial}{\partial z}$  ( $f_i$  - функция) и лежащие в гиперплоскостях поля  $\alpha = 0$ .

а) Вычислите значение в нуле коммутатора полей  $v_i, v_j$ .

б) Вычислите  $d\alpha(v_i, v_j)$ .

*Задача 7.* Пусть  $v, w$  – векторные поля на трехмерном многообразии, линейно независимые в каждой точке. Доказать, что натянутое на эти поля поле двумерных площадок интегрируемо если и только если векторные поля  $[v, w]$ ,  $v, w$  линейно зависимы в каждой точке.

*Задача 8.* Рассмотрим векторные поля в  $\mathbb{R}^3$  с координатами  $(x, y, z)$ :  $v = -y \frac{\partial}{\partial x} + x \frac{\partial}{\partial y}$ ,  $w = 2xz \frac{\partial}{\partial x} + 2yz \frac{\partial}{\partial y} + (z^2 + 1 - x^2 - y^2) \frac{\partial}{\partial z}$ . Где эти поля линейно независимы? Для каких точек трехмерного пространства выполняется условие интегрируемости площадок, натянутых на эти поля? Найти все двумерные компактные интегральные многообразия соответствующего поля двумерных площадок.