Листок 2. Мера Лебега. Интеграл Римана и интеграл Лебега.

Мера Лебега

Множество $U \subset [0,1]$ называется открытым в $[0,1]$, если найдется открытое множество $V \subset \mathbb{R}$ такое, что $U = V \bigcap [0,1]$. Открытое множество U состоит из попарно не пересекающихся интервалов и может быть одного или двух полуинтервалов, содержащих точки 0 и 1. Напомним, что мера $\lambda(U)$ открытого множества U определяется как сумма длин составляющих его промежутков.

Задача 1. Докажите, что если $U = \bigcup_n U_n$, где U_n – попарно непересекающиеся открытые множества в $[0,1]$, то $\lambda(U) = \sum_n \lambda(U_n)$. Более того, если $U \subset \bigcup_n U_n$, где открытые множества U_n уже могут пересекаться, то $\lambda(U) \leq \sum_n \lambda(U_n)$.

Пусть $E \subset [0,1]$. Верхней мерой Лебега множества E называют число

$$\lambda^*(E) = \inf_{U : E \subset U} \lambda(U),$$

где U – открытое множество.

Задача 2. Докажите, что $\lambda^*(U) = \lambda(U)$ для открытого множества U.

Задача 3. Докажите, что, если $E \subset \bigcup E_k$, то $\lambda^*(E) \leq \sum_k \lambda^*(E_k)$.

Задача 4. Предположим, что F_n – замкнутые попарно непересекающиеся множества. Докажите, что

$$\lambda^*(\bigcup_n F_n) = \sum_n \lambda^*(F_n).$$

Задача 5. Пусть U – открытое множество в $[0,1]$. Докажите, что $\lambda^*(U) + \lambda^*([0,1] \setminus U) = 1$.

Множество $E \subset [0,1]$ называется измеримым по Лебегу, если

$$\lambda^*(E) + \lambda^*([0,1] \setminus E) = 1.$$

Из предыдущей задачи следует, что открытые и замкнутые множества измеримы по Лебегу.

Задача 6. Докажите, что $E \subset [0,1]$ измеримо тогда и только тогда, когда для всякого $\varepsilon > 0$ существуют замкнутое множество F_ε и открытое множество U_ε такие, что $F_\varepsilon \subset E \subset U_\varepsilon$ и $\lambda^*(U_\varepsilon) - \lambda^*(F_\varepsilon) < \varepsilon$.

Задача 7. Пусть E_n – попарно непересекающиеся измеримые множества в $[0,1]$. Докажите, что множество $E = \bigcup_n E_n$ измеримо и $\lambda^*(E) = \sum_n \lambda^*(E_n)$.

Задача 8. Докажите, что множество всех измеримых подмножеств $[0,1]$ замкнуто относительно дополнений, счетных объединений, счетных пересечений и содержит $[0,1]$ и пустое множество. Систему подмножеств с такими свойствами называют σ-алгеброй.

Далее верхнюю меру Лебега на измеримых множествах обозначаем просто λ.

Задача 9. Для всякого $\varepsilon > 0$ постройте замкнутое нигде не плотное множество $F_\varepsilon \subset [0,1]$ и такое, что

$$\lambda(F_\varepsilon) \geq 1 - \varepsilon.$$

Задача 10. Докажите, что мера λ инвариантна относительно сдвигов.

Рассмотрим на $[0,1]$ отношение эквивалентности $x \sim y$, если $x - y \in \mathbb{Q}$. Из каждого класса эквивалентности выберем одного представителя и соберем их всех в множество E (здесь мы используем аксиому выбора). Построенное множество называют множеством Витали.

Задача 11. Докажите, что множество E не является измеримым.

Интеграл Римана и мера Жордана

Число $I = \int_0^1 f(x)\,dx$ называется интегралом Римана от функции f по $[0,1]$, если для всякого $\varepsilon > 0$ найдется $\delta > 0$ такое, что для всякого разбиения $T = \{0 = x_0 < x_1 < \ldots < x_n = 1\}$ с масштабом $\lambda(T) = \max_i |x_i - x_{i-1}| < \delta$ и всяких отмеченных точек $\xi_i \in \Delta_i = [x_{i-1}, x_i]$ верно неравенство $|I - \sum_{i=1}^n f(\xi_i)|\Delta_i|| < \varepsilon$. Здесь $|\Delta_i| = |x_i - x_{i-1}|$. Кратко это определение записываем так $I = \lim_{\lambda(T)\to 0} \sum_{i=1}^n f(\xi_i)|\Delta_i|$. Число I обозначаем через $\displaystyle\int_0^1 f(x)\,dx$.

Задача 12. Докажите, что интегрируемая по Риману функция ограничена.

Выражения $s(T) = \sum_{i=1}^n \inf_{\Delta_i} f|\Delta_i|$ и $S(T) = \sum_{i=1}^n \sup_{\Delta_i} f|\Delta_i|$ называются нижней суммой Дарбу и верхней суммой Дарбу соответственно.

Упр 1. Каков геометрический смысл сумм Дарбу?

Задача 13. Докажите, что

(a) если $T' \subset T$, то $s(T) \leq s(T')$ и $S(T') \leq S(T)$.

(b) существуют пределы $\lim_{\lambda(T)\to 0} s(T) = \sup_T s(T)$ и $\lim_{\lambda(T)\to 0} S(T) = \inf_T S(T)$.

Задача 14. (Критерий Дарбу) Докажите, что ограниченная функция интегрируема по Риману тогда и только тогда, когда $\sup_T s(T) = \inf_T S(T)$. Используя критерий Дарбу объясните для каких множеств $E \subset [0,1]$ характеристическая функция χ_E интегрируема по Риману.

Множество E называется измеримым по Жордану, если ее характеристическая функция интегрируема по Риману. Мерой Жордана такого множества называется число $\mu(E) = \int_0^1 \chi_E(x)\,dx$.

Задача 15. Докажите, что непрерывные функции и монотонные функции интегрируемы по Риману.

Интеграл Лебега Функция $f\colon [0,1] \mapsto \mathbb{R}$ называется измеримой, если для любых $\alpha < \beta$ множество $\{x\colon \alpha < f(x) < \beta\}$ измеримо.

Упр 2. Докажите, что непрерывные функции и монотонные функции являются измеримыми.

Упр 3. Приведите пример неизмеримой функции.

Задача 16. Докажите, что для измеримой функции f множества $\{x\colon f(x) > \alpha\}$ и $\{x\colon f(x) = \alpha\}$ измеримы.

Задача 17. Пусть f, g – измеримые функции. Докажите, что $f+g$, $f\cdot g$, $\max\{f,g\}$ и $|f|$ являются измеримыми функциями. Докажите, что композиция $\psi(f)$, где ψ – непрерывная функция, является измеримой функцией.

Задача 18. Докажите, что поточечный предел измеримых функций является измеримой функцией. Выведите из этого утверждения, что сходящаяся почти всюду последовательность измеримых функций сходится к измеримой функции.

Пусть f – ограниченная и измеримая функция на измеримом множестве E и область ее значений лежит в интервале $(-C, C)$. Для всякого разбиения $T = \{-C = y_0 < y_1 < \ldots < y_n = C\}$ определим нижнюю сумму Лебега и верхнюю сумму Лебега:

$$s(T) = \sum_{i=1}^{n} y_{i-1}\cdot\lambda(\{x\colon y_{i-1} \le f(x) < y_i\}), \quad S(T) = \sum_{i=1}^{n} y_i\cdot\lambda(\{x\colon y_{i-1} \le f(x) < y_i\})$$

Упр 4. Каков геометрический смысл сумм Лебега и в чем существенное отличие от сумм Дарбу?

Задача 19. Докажите следующие свойства сумм Лебега:

(a) $S(T) - s(T) \le \max_i |y_i - y_{i-1}|\lambda(E)$

(b) если $T' \subset T$, то $s(T) \le s(T')$ и $S(T) \le S(T')$.

(c) $s(T) \le S(Q)$.

Из задачи 19 немедленно следует, что $\inf_T S(T) = \sup_T s(T) = I$. Это число I называют интегралом Лебега функции f.

Упр 5. Проверьте, что определение не зависит от выбора C.

Задача 20*. Докажите аддитивность и линейность интеграла Лебега.

Задача 21*. Докажите, что для ограниченной функции f определение интеграла Лебега из прошлого листка совпадает с приведенным выше определением.

Задача 22*.(Теорема Лебега) Если последовательность измеримых функций f_n почти всюду сходится к функции f на измеримом множестве E и $|f_n(x)| \le C$ для всяких n, $x \in E$ и некоторого C, то $\lim_{n\to\infty} \int_E f_n(x)\,dx = \int_E f(x)\,dx$.

Задача 23. Будем говорить, что две измеримые функции f, g на $[0,1]$ независимыми, если для любых отрезков Δ_1 и Δ_2 выполнено $\lambda(\{x : f(x) \in \Delta_1, g(x) \in \Delta_2\}) = \lambda(\{x : f(x) \in \Delta_1\})\lambda(\{x : g(x) \in \Delta_2\})$.

(a) Докажите, что константа независима с любой функцией.

(b) Пусть g – непрерывная функция. Докажите, что $f(x) = x$ и g независимы только, если g – константа.

(c) Приведите пример двух непостоянных (отличающихся от константы на множестве положительной меры) независимых функций.

Полезные неравенства для интегралов.

Далее f и g – непрерывные функции.

Упр 6. Пусть $p, q > 1$ и $p^{-1} + q^{-1} = 1$. Докажите неравенство Юнга: $ab \le p^{-1}a^p + q^{-1}b^q$ для $a, b > 0$.

Задача 24. Пусть $p, q > 1$ и $p^{-1} + q^{-1} = 1$. Докажите неравенства Гёльдера и Минковского:

$$\int_a^b |f||g|\,dx \le \Big(\int_a^b |f|^p\,dx\Big)^{1/p}\Big(\int_a^b |g|^q\,dx\Big)^{1/q}, \quad \Big(\int_a^b |f+g|^p\,dx\Big)^{1/p} \le \Big(\int_a^b |f|^p\,dx\Big)^{1/p} + \Big(\int_a^b |g|^p\,dx\Big)^{1/p}.$$

Функция f называется выпуклой на промежутке (α, β), если $f(\gamma x + (1-\gamma)y) \le \gamma f(x) + (1-\gamma)f(y)$ для всех $x, y \in (\alpha, \beta)$ и $\gamma \in [0,1]$.

Упр 7. Докажите, что для выпуклой функции f выполняется неравенство Йенсена:

$$f(\gamma_1 x_1 + \ldots + \gamma_n x_n) \le \gamma_1 f(x_1) + \ldots + \gamma_n f(x_n)$$

для всех $x_1, \ldots, x_n$ для всех x_i, $\gamma_i \ge 0$ и $\gamma_1 + \ldots + \gamma_n = 1$.

Задача 25. Пусть ψ – выпуклая функция на $\mathbb{R}$ и $f \ge 0$. Докажите неравенство Йенсена:

$$\psi\Big(\int_0^1 f(x)\,dx\Big) \le \int_0^1 \psi(f(x))\,dx.$$