НМУ, I курс, 20.03.2015

Листок 5. Компакты и их свойства.

Множество K в метрическом пространстве называется компактом, если из всякого его покрытия открытыми множествами можно выбрать конечное подпокрытие. Важный пример – отрезок в $\mathbb{R}$.

Задача 1. Докажите, что параллелепипед $[a_1, b_1] \times \ldots \times [a_n, b_n]$ – компакт в $\mathbb{R}^n$.

Задача 2. Для произвольного метрического пространства докажите, что

(a) компакт является ограниченным множеством;

(b) компакт является замкнутым множеством;

(c) замкнутое подмножество компакта является компактом;

(d) бесконечное подмножество компакта имеет предельную точку;

(e) всякая последовательность точек компакта имеет подпоследовательность сходящуюся к элементу этого компакта.

Задача 3. Докажите, что в $\mathbb{R}^n$ множество компактно тогда и только тогда, когда оно замкнуто и ограниченно.

Задача 4. Докажите, что замкнутый единичный шар в $C([0,1])$ не является компактом.

Множество A называется ε-сетью множества B, если шары радиуса ε и с центрами в элементах A покрывают множество B. Иначе говоря, для всякого элемента $b \in B$ найдется элемент $a \in A$ такой, что $\varrho(a, b) < \varepsilon$. Если множество A конечно, то говорят о конечной ε-сети.

Подмножество B метрического пространства X называется вполне ограниченным, если для всякого $\varepsilon > 0$ у множества B существует конечная ε-сеть.

Задача 5. (Критерий компактности Хаусдорфа) Замкнутое множество в полном пространстве является компактом тогда и только тогда, когда оно вполне ограниченно.

Задача 6. Приведите пример, показывающий, что условие полноты пространства отбросить нельзя.

Задача 7. Пусть $\lim_{k\to\infty} |\alpha_k| = +\infty$. Докажите, что множество $\{(x_i)\colon\ \sum_{i=1}^{\infty} \alpha_i^2 x_i^2 \leq 1\}$ – компакт в l_2.

Задача 8. (Секвенциальная компактность) Докажите, что множество является компактом тогда и только тогда, когда из всякой последовательности его элементов можно выбрать подпоследовательность, сходящуюся к элементу этого множества.

В топологическом пространстве компакт определяется также как и выше: из всякого покрытия открытыми множествами можно выбрать конечное подпокрытие.

Задача 9. Приведите пример компакта в топологическом пространстве, который не является замкнутым множеством. Покажите, что в Хаусдорфовом пространстве ($\forall x, y \in X \quad \exists U, V \in \tau$ такие, что $U \bigcap V = \emptyset$ и $x \in U$, $y \in V$) всякий компакт является замкнутым множеством.

Задача 10*. Приведите пример компакта в топологическом пространстве и последовательности элементов этого компакта, из которой нельзя выбрать сходящуюся подпоследовательность.

Задача 11. Пусть K – компакт в (X, ϱ_X) и $f\colon K \mapsto (Y, \varrho_Y)$ – непрерывное отображение. Докажите, что

(a) $f(K)$ – компакт;

(b) если $Y = \mathbb{R}$, $\varrho_Y(y_1, y_1) = |y_1 - y_2|$, то f – ограничена и существуют $x_m, x_M \in K$ такие, что $f(x_m) = \inf_K f$ и $f(x_M) = \sup_K f$;

(c) f – равномерно непрерывна, т. е. для всякого $\varepsilon > 0$ найдется $\delta > 0$ такое, что $\varrho_X(x_1, x_2) < \delta$ влечет $\varrho_Y(f(x_1), f(x_2)) < \varepsilon$;

Задача 12. Докажите, что в $\mathbb{R}^n$ для любых двух норм $\|\cdot\|_1$ и $\|\cdot\|_2$ существуют числа $\alpha, \beta > 0$ такие, что $\alpha\|x\|_1 \leq \|x\|_2 \leq \beta\|x\|_1$.

Задача 13. Пусть F – конечномерное линейное подпространство в нормированном пространстве X и $F \neq X$. Докажите, что существует такой вектор x, что $\|x\| = 1$ и $\|x - y\| \geq 1$ для всех $y \in F$.

Задача 14. Докажите, что нормированное пространство X конечномерно тогда и только тогда, когда всякий замкнутый шар в этом пространстве компактен.

Непрерывная биекция, у которой обратное отображение непрерывно, называется гомеоморфизмом.

Задача 15. Докажите, что существует гомеоморфизм отображающий $\{0,1\}^\infty$ на множество Кантора.

Задача 16. Докажите, что всякое непустое компактное множество в метрическом пространстве является образом множества Кантора при некотором непрерывном отображении.

Будем говорить, что компакт K в метрическом пространстве имеет размерность не выше N, если для всякого $\varepsilon > 0$ найдется конечная ε-сеть $a_1, \dots a_k$ такая, что всякая точка компакта принадлежит на более чем $N+1$ шару радиуса ε с центром в какой-то из точек a_i.

Задача 17. Докажите, что отрезок имеет размерность не выше 1, и не может иметь размерность 0. Докажите, что конечнозвенная ломаная в $\mathbb{R}^n$ имеет размерность не выше 1 и не может иметь размерность 0.

Задача 18. Докажите, что непрерывная кривая в $\mathbb{R}^n$ обязательно имеет размерность большую нуля. Верно ли, что она имеет размерность не большую 1?

Задача 19. Покажите на примере, что не всякую конечнозвенную ломаную в $\mathbb{R}^3$ можно гомеоморфно вложить в $\mathbb{R}^2$.

Следующие задачи посвящены доказательству теоремы Менгера–Небелинга–Понтрягина:

всякий компакт размерности не выше N можно гомеоморфно вложить в $\mathbb{R}^{2N+1}$.

Отображение f из метрического пространства в метрическое пространства называется ε-отображением, если из того, что $f(x_1) = f(x_2)$ следует неравенство $\varrho(x_1, x_2) < \varepsilon$. Если отображение f является ε-отображением для всякого $\varepsilon > 0$, то f – инъекция.

Пусть далее K – компакт размерности не выше N. Рассмотрим пространство $C(K, \mathbb{R}^{2N+1})$ непрерывных отображений $f \colon K \mapsto \mathbb{R}^{2N+1}$ с метрикой $\varrho(f,g) = \max_{x\in K} \|f(x) - g(x)\|$, где $\|y\| = \sqrt{\sum_i y_i^2}$.

Пусть U_n – множество всех непрерывных $1/n$-отображений компакта K в $\mathbb{R}^{2N+1}$.

Задача 20. Докажите, что U_n – открытое множество.

Задача 21. Докажите, используя теорему Бэра, что если для любого n множество U_n всюду плотно, то искомое (в теореме) вложение существует.

Для завершения доказательства согласно теореме Бэра достаточно показать, что U_n всюду плотны в $C(K, \mathbb{R}^{2N+1})$. Пусть f – произвольный элемент $C(K, \mathbb{R}^{2N+1})$ и $\varepsilon > 0$. Найдем $\varepsilon/2$-сеть $\{a_1, \dots a_k\}$ такую, что каждая точка компакта входит в не более чем $N+1$ шар и на каждом шаре $B_i = B(a_i, \varepsilon)$ колебание функции f меньше наперед заданного числа $\gamma > 0$. Выбираем k точек $p_1, \dots, p_k$ в $\mathbb{R}^{2N+1}$ так, что

1) расстояние от p_i до $f(B_i)$ меньше γ,

2) никакие $m+2$ точки p_i не лежат в m-мерном пространстве, $m \le 2N$. (Например в $\mathbb{R}^3$ это означает, что все точки различны, никакие три не лежат на одной прямой и никакие четыре не лежат на одной плоскости.)

Задача 21. Покажите, что такой выбор точек возможен.

Пусть $w_i(x)$ – расстояние от x до $K \setminus B_i$.

Задача 22. Докажите, что w_i – непрерывные функции.

Положим $g(x)$ – центр масс точек p_i с весом $w_i(x)$.

Задача 23. Докажите, что $g(x)$ – непрерывная функция и расстояние между $g(x)$ и $f(x)$ меньше 2γ.

Задача 24. Докажите, что g – ε-отображение.

(Указание: рассмотрим случай $N = 1$. Каждая точка компакта входит в не более чем два шара B_i. Пусть x_1 входит в B_1, B_2 и x_2 входит в B_3, B_4. Тогда $w_i(x_1) = 0$ при $i > 2$ и $w_i(x_2) = 0$ при $i < 3$ и $i > 4$. Равенство $g(x_1) = g(x_2)$, влечет что наборы $\{p_1, p_2\}$ и $\{p_3, p_4\}$ пересекаются. Действительно прямая, проходящая через p_1, p_2, и прямая, проходящая через p_3, p_4 пересекаются в точке $g(x_1) = g(x_2)$. Если указанные наборы не пересекаются, то имеем четыре точки лежащие на одной плоскости, а это противоречит условие 2) на точки p_i. Итак, наборы пересекаются и, следовательно, x_1, x_2 принадлежат одному шару.)