# Листок 8. Теорема о неявной функции.

Задача 0. Изобразите на плоскости множество точек, задаваемых уравнением $F(x,y)=0$:

(a) $F(x,y)=x^2-y^2$, (b) $F(x,y)=x^2+y^2-1$, (c) $F(x,y)=x^3+y^2$.

Найдите во всех пунктах критические точки функции $F$ (т. е. точки, в которых $\mathrm{grad} F=0$). Найдите все точки, в окрестности которых указанные множества задаются как график функции a) $y=f(x)$, b) $x=g(y)$.

Теорема о неявной функции фактически объясняет в окрестности каких точек множество уровня $F(x,y)=0$ является графиком функции. Мы рассмотрим два метода доказательства теоремы о неявной функции.

**Соображения монотонности**

Задача 1. Пусть $F(x,y)$ – непрерывная функция на $\mathbb{R}^2$ и $F(x_0,y_0)=0$. Предположим, что найдется прямоугольник $\Pi=[x_0-\alpha,x_0+\alpha]\times[y_0-\beta,y_0+\beta]$ такой, что для всякого $x\in[x_0-\alpha,x_0+\alpha]$ функция $y\mapsto F(x,y)$ строго возрастает на $[y_0-\beta,y_0+\beta]$. Докажите, что уменьшая при необходимости $\alpha$ и $\beta$ можно считать, что пересечение множества $\{(x,y)\colon F(x,y)=0\}$ с прямоугольником $\Pi$ является графиком некоторой функции $y=f(x)$.

Задача 2. Докажите, что в условиях задачи 1 функция $y=f(x)$ является непрерывной.

Задача 3. Докажите, что если в условиях задачи 2 функция $F$ непрерывно дифференцируема и

$$\frac{\partial F}{\partial y}(x_0,y_0)>0,$$

то уменьшая по необходимости $\alpha$ можно считать, что функция $y=f(x)$ непрерывно дифференцируема на $[x_0-\alpha,x_0+\alpha]$ и

$$f'(x)=-\frac{\frac{\partial F}{\partial x}(x,f(x))}{\frac{\partial F}{\partial y}(x,f(x))}.$$

Задача 4. Перенесите утверждения задач 1–3 на случай, когда $x\in\mathbb{R}^n$.

Задача 5. Пусть $\varphi_1(x,y)$ и $\varphi_2(x,y)$ – непрерывно дифференцируемые функции. Рассмотрим отображение $\varphi\colon\mathbb{R}^2\mapsto\mathbb{R}^2$, заданное уравнениями

$$\begin{cases} u=\varphi_1(x,y)\\ v=\varphi_2(x,y)\end{cases}$$

Предположим, что в точке $(x_0,y_0)$ Якобиан отображения $\varphi$ отличен от нуля. Докажите, что найдутся такие окрестности $U((x_0,y_0))$ и $V((u_0,v_0))$, где $u_0=\varphi_1(x_0,y_0)$ и $v_0=\varphi_2(x_0,y_0)$, что отображение $\varphi\colon U\mapsto V$ является диффеоморфизмом, т. е. $\varphi$ – биекция и обратное отображение $\varphi^{-1}$ непрерывно дифференцируемо.

Указание: используйте метод исключения переменных.

**Теорема о сжимающем отображении.**

Задача 6. Пусть $(X,\varrho)$ – полное метрическое пространство и $f\colon X\mapsto X$ является сжимающим отображением, т. е. $\varrho(f(x),f(y))\le q\varrho(x,y)$ для всех $x,y$ и некоторого $q\in(0,1)$. Докажите, что существует единственная неподвижная точка $x$: $f(x)=x$.

Задача 7. Студент Вася вышел из своего дома и пошел в университет. На полпути к университету он решил прогулять пару и пойти на каток. На полпути к катку он подумал, что лучше пойти в кино. Однако на полпути к кинотеатру он снова передумал и свернул к университету. Куда придет студент Вася, если он будет продолжать двигаться таким образом?

Задача 8. Докажите, что неподвижная точка непрерывно зависит от сжимающего отображения, т. е. если $f$ и $g$ – сжимающие отображения на полном метрическом пространстве, то

$$\forall\,\varepsilon>0\,\exists\,\delta>0\colon\ \sup_z\varrho(f(z),g(z))\le\delta\Longrightarrow\varrho(x_f,x_g)\le\varepsilon,$$

где $x_f,x_g$ – неподвижные точки для $f$ и $g$.

Задача 9. Пусть $F(x,y)$ – непрерывно дифференцируемая функция на $\mathbb{R}^2$ и $F(x_0,y_0)=0$. Предположим, что $J=\frac{\partial F}{\partial y}(x_0,y_0)\neq 0$. Рассмотрим функцию $G(x,y)=y-J^{-1}F(x,y)$. Ясно, что $G(x,y)=y$ равносильно уравнению $F(x,y)=0$. Докажите, что

(a) $\frac{\partial G}{\partial y}(x_0,y_0)=0$ и $\left|\frac{\partial G}{\partial y}(x_0,y_0)\right|\leq 1/2$ в некотором прямоугольнике $[x_0-\alpha,x_0+\alpha]\times[y_0-\beta,y_0+\beta]$;

(b) уменьшая, если потребуется, $\alpha$ можно считать, что для всякого $x\in[x_0-\alpha,x_0+\alpha]$ отображение $y\mapsto G(x,y)$ отображает отрезок $[y_0-\beta,y_0+\beta]$ в себя и является сжимающим;

(c) в некоторой окрестности точки $(x_0,y_0)$ множество уровня $\{(x,y)\colon F(x,y)=0\}$ является графиком некоторой непрерывной функции $y=f(x)$.

Преимущество подхода, использующего теорему о сжимающем отображении, перед соображениями монотонности состоит в том, что доказательство без каких-либо изменений переносится на многомерный случай.

Задача 10. Повторяя рассуждения из предыдущей задачи докажите следующее утверждение. Пусть $F_k(x,y)$ – непрерывно дифференцируемые функции на $\mathbb{R}^m_x\times\mathbb{R}^n_y$ и $F_k(x_0,y_0)=0$ при $1\leq k\leq n$. Предположим, что матрица $J=\left(\frac{\partial F_k}{\partial y_j}(x_0,y_0)\right)$ невырождена. Докажите, что существуют такие окрестности $U(x_0)$ и $V(x_0)$ и непрерывно дифференцируемые функции $f_1,\ldots,f_n$, что пересечение окрестности $U\times V$ с множеством $\{(x,y)\colon F_k(x,y)=0, k=1,\ldots,n\}$ совпадает с множеством $\{(x,y)\colon x\in U, y_i=f_i(x), i=1,\ldots,n\}$.

Задача 11. Докажите, что любой диффеоморфизм $\varphi\colon\mathbb{R}^n\mapsto\mathbb{R}^n$ локально, т. е. как отображение некоторой возможно малой окрестности $U(x_0)$ на некоторую окрестность $V(\varphi(x_0))$, разлагается в композицию диффеоморфизмов, меняющих лишь одну координату. В частности, аффинное отображение $\varphi(x)=Ax+b$, $\det A\neq 0$, разлагается в композицию отображений, в которых все координаты кроме одной не изменяются, а одна меняется одним из следующих способов: $x_i\mapsto x_i+\beta$, $x_i\mapsto\lambda\cdot x_i$ или $x_i\mapsto x_i+x_k$.

Задача 12. Пусть $\gamma(t)=(x(t),y(t))$ – кривая на плоскости, заданная непрерывно дифференцируемыми функциями $x(t)$ и $y(t)$, где $t\in[0,1]$. Прямая $l$ пересекающая кривую $\gamma$ называется трансверсалью, если во всех точках пересечения вектор скорости $\dot\gamma$ отличен от нуля и не параллелен прямой $l$. Докажите, что множество точек пересечения кривой с трансверсалью конечно.

Задача 13. Пусть $F(x,y)$ – непрерывно дифференцируемая функция, причем $\mathrm{gradF}\neq 0$. Пусть множество $G=\{(x,y)\colon F(x,y)=0\}$ непусто. Докажите, что для всякой точки $(x_0,y_0)\in G$ найдется окрестность $U((x_0,y_0))$ и диффеоморфизм $\varphi$, отображающий окрестность $U(x_0,y_0)$ на открытый прямоугольник $\Pi=(-1,1)\times(-1,1)$ таким образом, что $\varphi(G\bigcap U)=\{(x,y)\colon x\in(-1,1), y=0\}$.

Задача 14. Пусть $\varphi\colon\mathbb{R}^2\mapsto\mathbb{R}^2$ – диффеоморфизм. Сделайте замену координат $y=\varphi(x)$ в системе дифференциальных уравнений $\dot y_1=v_1(y_1,y_2)$, $\dot y_2=v_2(y_1,y_2)$. Объясните почему удобнее записывать векторное поле $(v_1,v_2)$ в виде $v_1\frac{\partial}{\partial y_1}+v_2\frac{\partial}{\partial y_2}$.

Задача 15. Пусть $H(p,q)$ – непрерывно дифференцируемая функция и $\frac{\partial}{\partial q}H\neq 0$. Сделайте замену переменных $u=p, v=H(p,q)$ в системе уравнений $\dot p=-\frac{\partial}{\partial q}H$, $\dot q=\frac{\partial}{\partial p}H$.

Задача 16. Сделайте замену переменных $u=x+t$ и $v=x-t$ в уравнении $\frac{\partial^2 f}{\partial t^2}-\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}=0$ и решите его.

Задача 17. Сделайте замену переменных $u=x+y$, $v=x$ и $w=xz-y$ в уравнении $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}-2\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}+\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=0$ и получите уравнение на новую функцию $w=w(u,v)$.