

## Листок 3

- 3.1.** Опишите с точностью до изоморфизма все алгебры Ли размерности 1 и 2:  
а) над  $\mathbb{R}$ ; б) над  $\mathbb{C}$ .
- 3.2.** Докажите, что группа Ли коммутативна тогда и только тогда, когда коммутативна ее алгебра Ли.
- 3.3.** Пусть  $P_n$  — пространство многочленов с вещественными коэффициентами степени не выше  $n$ . Группа Ли  $G = \mathbb{R}$  действует на  $P_n$  сдвигами аргумента:  $\rho(t)(x) = x + t$ , где  $t \in G$ . Покажите, что соответствующее действие алгебры Ли  $\mathfrak{g} = \mathbb{R}$  задается оператором  $\rho(a) = a\partial_x$ . Выведите отсюда формулу Тейлора для многочленов.
- 3.4.** Пусть  $G$  — группа Ли,  $\mathfrak{g}$  — ее алгебра Ли.  
а) Докажите, что отображения  $g \mapsto \text{Ad } g$  и  $x \mapsto \text{ad } x$  задают морфизмы групп Ли  $G \rightarrow \text{Aut}(G)$  и алгебр Ли  $\mathfrak{g} \rightarrow \text{Der } \mathfrak{g}$  соответственно. (Образы этих морфизмов называются соответственно *внутренними автоморфизмами* и *внутренними дифференцированиями*).  
б) Покажите, что  $\text{ad}(\mathfrak{g})$  — идеал в  $\text{Der } \mathfrak{g}$ .
- 3.5.** Докажите следующие *изоморфизмы малых размерностей*:  
а)  $\mathfrak{su}(2) \cong \mathfrak{so}(3, \mathbb{R})$ ;  
б)  $\mathfrak{su}(2) \oplus \mathfrak{su}(2) \cong \mathfrak{so}(4, \mathbb{R})$ ;  
в)  $\mathfrak{su}(4) \cong \mathfrak{so}(6, \mathbb{R})$ .
- 3.6.** Гомоморфизмам каких групп соответствуют равенства из пунктов: а) ; б) ; в\*) предыдущей задачи?