Листок 5

Рассмотрим на $\mathfrak{g}$ билинейную форму, заданную формулой

$$(X,Y) = \operatorname{tr}(\operatorname{ad} X)(\operatorname{ad} Y)).$$

Она называется *формой Картана–Киллинга.*

5.1. Докажите следующие свойства формы Картана–Киллинга:

а) $(X,Y) = (Y,X)$ (симметричность);

б) $([X,Y],Z) = (X,[Y,Z])$ (инвариантность);

в) Если $\mathfrak{n}$ — идеал в $\mathfrak{g}$ и $X,Y \in \mathfrak{n}$, то $(X,Y)_{\mathfrak{n}} = (X,Y)_{\mathfrak{g}}$.

г) Если $\mathfrak{h}$ — идеал, то $\mathfrak{h}^{\perp}$ — тоже идеал.

5.2. Пусть $\mathfrak{g}$ — алгебра Ли, $(\,,\,)$ — ad-инвариантная симметричная форма на $\mathfrak{g}$. Покажите, что элемент $\omega \in (\mathfrak{g}^*)^{\otimes 3}$, определенный как

$$\omega(X,Y,Z) = ([X,Y],Z),$$

является кососимметричным и ad-инвариантным.

5.3. Пусть $G = \mathrm{SU}(2)$. Напомним, что G диффеоморфна трёхмерной сфере.

а) Покажите, что левое действие G на $G \cong S^3 \subset \mathbb{R}^4$ продолжается до действия G на $\mathbb{R}^4$ линейными ортогональными преобразованиями $\mathbb{R}^4$.

б) Пусть $\omega \in \Omega^3(G)$ — левоинвариантная 3-форма, значение которой в $1 \in G$ определено как

$$\omega(X,Y,Z) = ([X,Y],Z).$$

Покажите, что $\omega = \pm 4dV$, где dV — форма объёма на сфере, индуцированная из $\mathbb{R}^4$.

в) Покажите, что $\frac{1}{8\pi^2}\omega$ есть биинвариантная форма на G, и при подходящем выборе ориентации на G

$$\frac{1}{8\pi^2}\int_G \omega = 1.$$