

Листок 7

- 7.1.** Пусть V — представление алгебры Ли \mathfrak{g} , а W — его подпредставление. Докажите, что для формы $B_V(x, y) = \operatorname{tr} \rho_V(x)\rho_V(y)$ выполнено равенство $B_V = B_W + B_{V/W}$.
- 7.2.** Покажите, что для $\mathfrak{g} = \mathfrak{sl}(n, \mathbb{C})$ форма Картана–Киллинга равняется $K(x, y) = 2n \operatorname{tr}(xy)$.
- 7.3.** Пусть \mathfrak{g} — вещественная алгебра Ли, на которой форма Картана–Киллинга положительно определена. Покажите, что $\mathfrak{g} = 0$.
УКАЗАНИЕ. \mathfrak{g} является подалгеброй в $\mathfrak{so}(\mathfrak{g})$.
- 7.4.** Пусть \mathfrak{g} — простая алгебра Ли.
а) Покажите, что инвариантное скалярное произведение единственно с точностью до множителя.
б) Покажите, что присоединенное представление $\operatorname{ad} \mathfrak{g}$ является самосопряженным.
- 7.5.** Пусть $\mathfrak{g} \subset \mathfrak{gl}(n)$ — алгебра, образованная матрицами вида $\begin{pmatrix} A & B \\ 0 & C \end{pmatrix}$, где блок нулей имеет размер $k \times (n - k)$. (Такие подалгебры в $\mathfrak{gl}(n)$ называются *параболическими*). Найдите радикал и подалгебру Леви этой алгебры.