

## Листок 8

**8.1.** Докажите, что данное на лекции определение полупростого и нильпотентного элемента в случае алгебры  $\mathfrak{gl}(V)$  совпадает с «обычным»: элемент  $x \in \mathfrak{gl}(V)$  полупрост (нильпотентен) как оператор на  $V$  тогда и только тогда, когда оператор  $\text{ad } x: \mathfrak{gl}(V) \rightarrow \mathfrak{gl}(V)$  полупрост (нильпотентен).

**8.2.** Покажите, что если  $\mathfrak{h} \subset \mathfrak{g}$  — картановская подалгебра в полупростой алгебре Ли, то  $\mathfrak{h}$  является нильпотентной подалгеброй, совпадающей со своим нормализатором  $n(\mathfrak{h}) = \{x \in \mathfrak{g} \mid (\text{ad } x)(\mathfrak{h}) \subset \mathfrak{h}\}$ .

**8.3.** Пусть  $\mathfrak{h} \subset \mathfrak{so}(4, \mathbb{C})$  — подалгебра матриц вида

$$\begin{pmatrix} 0 & -a & 0 & 0 \\ a & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -b \\ 0 & 0 & b & 0 \end{pmatrix}.$$

Покажите, что  $\mathfrak{h}$  является картановской подалгеброй в  $\mathfrak{so}(4, \mathbb{C})$ , и опишите соответствующее корневое разложение.

**8.4. а)** Определим билинейную форму  $B$  на  $W = \Lambda^2 \mathbb{C}^4$  по правилу

$$\omega_1 \wedge \omega_2 = B(\omega_1, \omega_2)e_1 \wedge e_2 \wedge e_3 \wedge e_4.$$

Проверьте, что  $B$  — невырожденная симметрическая форма, и укажите ортонормированный базис для  $B$ .

**б)** Покажите, что форма  $B$  инвариантна относительно стандартного действия  $\mathfrak{sl}(4, \mathbb{C})$  на  $\Lambda^2 \mathbb{C}^4$ .

**в)** Постройте гомоморфизм  $\mathfrak{sl}(4, \mathbb{C}) \rightarrow \mathfrak{so}(6, \mathbb{C})$  и покажите, что он является изоморфизмом (ср. с задачей 3.5 в)).