

Экзамен

Задача 1. Сколько существует связных комплексных групп Ли с алгеброй Ли $\mathfrak{sl}(n, \mathbb{C})$?

Задача 2. Пусть $e \in \mathfrak{gl}(n, \mathbb{C})$ — нильпотентный элемент. Покажите, что существуют такие элементы $f, h \in \mathfrak{gl}(n, \mathbb{C})$, что f нильпотентен, h полупрост, и эти три элемента образуют $\mathfrak{sl}(2)$ -тройку, т.е. удовлетворяют соотношениям для стандартных образующих $\mathfrak{sl}(2, \mathbb{C})$.

Задача 3. Постройте изоморфизм вещественных алгебр Ли $\mathfrak{sl}(2, \mathbb{R}) \cong \mathfrak{so}(2, 1)$. Какому гомоморфизму групп Ли он соответствует?

Задача 4. Пусть $\mathfrak{hei}(3)$ — трехмерная алгебра Гейзенберга, т.е. алгебра с образующими x, y, z и соотношениями $[x, y] = z$, $[x, z] = [y, z] = 0$.

- а) Перечислите все неприводимые конечномерные представления алгебры $\mathfrak{hei}(3)$;
- б) Найдите алгебру внешних дифференцирований алгебры $\mathfrak{hei}(3)$.

Задача 5. Найдите размерность пространства $SL(2, \mathbb{C})$ -инвариантов в пространстве $V^{\otimes n}$, где V — стандартное (двумерное) представление группы Ли $SL(2, \mathbb{C})$.

Задача 6. Пусть $\lambda \in \mathbb{C}$ — произвольное комплексное число. Рассмотрим (счётномерное) представление $V(\lambda) = \langle v_0, v_1, v_2, \dots \rangle$ алгебры $\mathfrak{sl}(2, \mathbb{C})$, заданное условиями

$$ev_0 = 0; \quad hv_0 = \lambda v_0; \quad fv_n = v_{n+1}, \quad n \geq 0.$$

- а) Выясните, при каких λ это представление неприводимо;
- б) Вычислите $\text{Hom}(V(\lambda), V(\mu))$.

Задача 7. Покажите, что всякая связная компактная комплексная группа Ли абелева.

Решения нужно сдать Е. Ю. Смирнову или в учебную часть до 19:00 вторника, 19 мая 2015 г. Вопросы по условиям можно задавать по адресу esmirnov@hse.ru.