16.5.4 / 15.4.19

Независимый Московский Университет, Алгебра-2, весна 2016

Лекции 10 и 11

0. Категории $RG - \mathcal{MOD}$ 1
...0.0. Определение 1
...0.1. Абелевость 1
...0.2. Представления над полем 1
1. Полупростота 2
...1.0. Контрпрмер в $\Bbbk G\mathcal{V}$ec 2
...1.1. Полупростота $\mathbb{C}G\mathcal{V}$ec 2
...1.2. Однозначность разложения 2
2. Операции над представлениями 2
...2.0. Прямая сумма 2
...2.1. Контрагредиентное представление 2
...2.2. Морфизмы в категории $\mathbb{C}G\mathcal{V}$ec 3
...2.3. Тензорное произведение 3
3. Характеры 3
...3.0. Определение 3
...3.1. Свойства отдельного характера 3
...3.2. Алгебра центральных функций 4
...3.3. Лемма Шура 4
...3.4. Соотношения ортогональности 6
4. Силовские подгруппы 7
5. Теорема Бернсайда (план доказательства)..7
$\mathbb{12}$

0. Категории $RG - \mathcal{MOD}$

0.0. Определение. Для $R \in\in \mathcal{RING}$ и $G \in\in \mathcal{GRP}$ определим категорию *представлений группы G над кольцом R*

$$RG - \mathcal{MOD} :=:= \{\{(M, \rho) \mid\mid M \in\in R - \mathcal{MOD}, \rho : G \to \mathrm{Aut} M;$$
$$\forall r \in R, g \in G, m \in M\ [g \cdot (r \cdot m) = r \cdot (g \cdot m)]\}\}$$

с очевидными морфизмами (абелевых групп, перестановочными с обоими действиями).

Как обычно, для $g \in G, m \in M$ использовано сокращение

$$(\rho(g))(m) =: g \cdot m.$$

0.1. Абелевость. Очевидно, введённые категории *преабелевы* (см. лекцию 2). Нулевым объектом является нулевая группа **O** с еднственно возможными действиями на ней. Для объектов

$(M,\rho),(M',\rho') \in\in RG-\mathcal{MOD}$ на R-модуле $M\oplus M'$ определено действие $\rho\oplus\rho' : g\mapsto [(m,m')\mapsto (g\cdot m, g\cdot m')]$.

Объекты непредставимые нетривиальным образом в виде прямых сумм, называются *неприводимыми*. Одна из основных задач теории – разложение произвольных объектов в сумму неприводимых. При некоторых дополнтельных предположениях она полностью решается; в этих случаях категория называется *полупростой*.

0.2. Представления над полем. В случае $R=\Bbbk \in\in \mathcal{FLD}$ обозначение категории $RG-\mathcal{MOD}$ заменяется на $\Bbbk G-\mathcal{VEC}$ – категорию (линейных) *представлений группы G над полем $\Bbbk$*. Типичное обозначение объектов: (V,ρ), где $V \in\in \Bbbk-\mathcal{VEC}$ и $\rho : G\to \mathsf{GL}(V/\Bbbk)$.

В случае *конечномерных* V будет использоваться (новое и нестандартное) обозначение

$$\Bbbk G-\mathcal{V}\mathbf{ec}.$$

В случае *топологической* группы G при исследовании категории $\mathbb{C}G-\mathcal{VEC}$ используется вся мощь функционального анализа.

В случае *конечной* группы G категория $\mathbb{C}G-\mathcal{V}\mathbf{ec}$ полупроста и является эфективным средством изучения группы G.

1. Полупростота

Далее $\#G<\infty$.

1.0. Контрпрмер в $\Bbbk G\mathcal{V}\mathbf{ec}$. См. задачу 7.1.

1.1. Полупростота $\mathbb{C}G\mathcal{V}\mathbf{ec}$. Здесь всё просто.

Теорема. *Любое представление конечной группы над полем комплексных чисел является прямой суммой неприводимых.*

Доказательство. Усреднение и ортогональное дополнение.

QED

1.2. Однозначность разложения. Его отсутствие. Каноническое разложение.

2. Операции над представлениями

2.0. Прямая сумма. Уже была.

2.1. Контрагредиентное представление. Инволютивный кофунктор
$$(V,\rho) \mapsto\!\!\mapsto (V^*,\rho^*).$$

2.2. Морфизмы в категории $\mathbb{C}G\mathcal{V}$ec. Для представлений
$$(V,\rho),(W,\sigma) \in\in \mathbb{C}G\mathcal{V}\mathbf{ec}$$
определяется действие $\rho \pitchfork \sigma$ на $V \pitchfork W$:
$$[\rho \pitchfork \sigma](g) : \Pi \mapsto \sigma(g) \circ \Pi \circ \rho(g^{-1}).$$
2.3. Тензорное произведение. Очередной раз пользуемся
$$X \otimes Y := X^* \pitchfork Y$$

3. Характеры

3.0. Определение. Серр, стр.17: для $(V,\rho) \in\in \mathbb{C}G - \mathcal{V}\mathbf{ec}$
$$\chi_{(V,\rho)} =: \boxed{\chi_\rho : G \to \mathbb{C} : g \mapsto \mathrm{Tr}\rho(g)}$$
3.1. Свойства отдельного характера. Серр, стр.17: для $(V,\rho) \in\in \mathbb{C}G - \mathcal{V}\mathbf{ec}$ и $\chi = \chi_{(V,\rho)}$
$$\chi(1) = \dim V;$$
$$(\forall g \in G)\ \chi(g^{-1}) = \overline{\chi(g)};$$
$$(\forall g,h \in G)\ \chi(ghg^{-1}) = \chi(h).$$
Последнее свойство означает, что *характеры постоянны на классах сопряжённости.* Такие функции называются *центральными.*

3.2. Алгебра центральных функций. Обозначение:

$$\mathbb{C}^G \supseteq \boxed{\mathcal{CF}(G) := \{\phi \mid \forall g, h \in G; \phi(gh) = \phi(hg)\}}$$

Пример: $G = \mathsf{S}_3$

3.3. Лемма Шура. Серр, стр. 18.

Представления $\rho, \sigma \in \mathbb{C}G - \mathcal{M}\mathbf{od}$ называются *дизъюнктыми*, если $\mathrm{Mor}_{\mathbb{C}G-\mathcal{M}\mathbf{od}}(\rho, \sigma) = \{0\}$.

Лемма Шура. *Два неприводимых представления одной и той же группы либо дизъюнктны, либо изоморфны. Эндоморфизмы неприводимого представления скалярны.*

$$\forall \rho, \sigma \in \mathrm{IRR}(G);\ \mathrm{Mor}_{\mathbb{C}G-\mathcal{M}\mathbf{od}}(\rho, \sigma) = \begin{cases} \{0\}, & \textit{если } \rho \not\simeq \sigma \\ \mathbb{C}, & \textit{если } \rho \simeq \sigma \end{cases}$$

Доказательство. Ядра...$\blacksquare$

Пример: неприводимые представления S_3 и их характеры.

Прямолинейный способ: бросается в глаза представление *изометриями равностороннего треугольника*, вложенного в $\mathbb{R}^3$ как стандартный симплекс.

Оно реализуется матрицами

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix},$$

знакомыми по запоминанию определителя 3×3-матрицы.

Если ввести в $\mathbb{R}^3$ стандартные координаты x, y, z, то относительно этого представления инвариантными будут прямая (x, x, x) и ортогональная ей плоскость, задаваемая уравнением $x+y+z = 0$.

Таким образом, представление изометриями треугольника разлагается в прямую сумму тривиального $\mathbf{1} := \mathbf{1}_{\mathsf{S}_3}$ и двумерного, которое мы обозначим ρ_2.

Ещё есть бросающееся в глаза одномерное представление

$$\mathrm{sgn} : \mathsf{S}_3 \longrightarrow \{\pm 1\}.$$

Поскольку $6 = 1^2 + 1^2 + 2^2$, мы нашли все интересующие нас неприводимые представления: в очевидных обозначениях

$$\mathrm{Irr}(\mathsf{S}_3) = \{\mathbf{1}, \mathrm{sgn}, \rho_2\}.$$

Переходя в пространстве $\mathbf{R}^3$ от базиса

$$\mathbf{e}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},\ \mathbf{e}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix},\ \mathbf{e}_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

к базису

$$\mathbf{e}'_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix},\ \mathbf{e}'_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix},\ \mathbf{e}'_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$$

с помощью матрицы

$$C := \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & -1 \end{pmatrix},$$

обратная к которой

$$C^{-1} = -\frac{1}{3} \begin{pmatrix} -1 & -1 & -1 \\ 1 & -2 & 1 \\ -2 & 1 & 1 \end{pmatrix},$$

преобразуем матрицы представления по формуле $X \mapsto C^{-1}XC$. Получим матрицы

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix},$$

По этому *матричному* представлению можно составить таблицу характеров (элементы группы расположены в очевидном порядке):

$\mathbf{1}$	sgn	ρ_2
1	1	2
1	1	-1
1	1	-1
1	-1	0
1	-1	0
1	-1	0

В следующем разделе мы увидим, как получить тот же результат без вычислений.

3.4. Соотношения ортогональности. Серр, стр. 22, 26. На пространстве $\mathbb{C}^G$ вводится

$$\langle , \rangle : \mathbb{C}^G \times \mathbb{C}^G \dashrightarrow \mathbb{C};$$
$$\langle \phi, \psi \rangle := \frac{1}{\# G} \sum_{g \in G} \overline{\chi(g)} \psi(g).$$

Теорема. *Характеры неприводимых представлений образуют ортонормальный базис в пространстве центральных функций.*

$\forall \rho, \rho' \in \mathbb{C}G - \mathcal{M}\mathbf{od}$;
$\phi := \chi_\rho, \phi' := \chi_{\rho'}$.

$$\langle \phi, \phi' \rangle = \begin{cases} 1, \text{ если } \phi = \phi' \\ 0, \text{ если } \rho \not\simeq \rho' \end{cases}$$

Доказательство. Серр, стр. 20-26.
Главное следствие. *Представление полностью определяется своим характером.*

$$\boxed{\chi_\rho = \chi_{\rho'} \Longleftrightarrow \rho \simeq \rho'}$$

Даже точнее: пусть

$$\mathfrak{M}(\mathbb{C}G - \mathcal{M}\mathbf{od})_{\text{irr}} =: \{\rho_1, \ldots, \rho_n\}$$

и

$$\phi_1 := \chi_{\rho_1}, \ldots, \phi_n := \chi_{\rho_n}.$$

Тогда для

$$\rho = k_1 \rho_1 \oplus \cdots \oplus k_n \rho_n$$

кратности находятся с помощью формул

$$k_i = \langle \chi_\rho, \chi_{\rho_i} \rangle.$$

Другое следствие: каноническое разложение...

Следствие для теоремы Бернсацйда: $\forall\forall G \in\in \mathcal{G}\mathbf{rp}$ *(то* *есть G – конечная группа). Пусть $g \in G \setminus \{1\}$ и $(\rho, V) \in\in \mathrm{Irr}_G \setminus \mathbf{1}$. Тогда, если НОД$(\#^G g, \dim V) = 1$, то $\chi_V(g) = 0$.*

4. Силовские подгруппы

Теорема (частично обратная к теореме Лагранжа). *Пусть $\forall\forall G \in\in \mathcal{G}\mathbf{rp}$ (то есть G – конечная группа), пусть $p \in \mathfrak{P}, k \in \dot{\mathbb{N}}$ и пусть $p^k \mid \#G$. Тогда $\exists H \subset G; \#H = p^k$.*

Все такие подгруппы называются p^k*-подгруппами.*

(Вторая) теорема Силова. *Если в обозначениях предыдущей теоремы $k = \mathrm{ord}_p(\#G)$, то все p^k-подгруппы сопряжены.*

5. Теорема Бернсайда (план доказательства)

Конечная группа, порядок которой делит не более двух простых, разрешима.

Пусть $\forall\forall G \in\in \mathcal{G}\mathbf{rp}$ (*то есть G – конечная группа*), $p, q \in \mathfrak{P}$ и

$$\#G \in p^{\dot{\mathbb{N}}} q^{\dot{\mathbb{N}}}.$$

Такая группа G будет называться (p, q)*-группой.*

Пользуясь индуктивными соображениями и стандартными результатами теории разрешимых групп, можно установить выводимость теоремы Бернсайда из следующей.

Главная теорема несуществования. *Простых неабелевых (p, q) – групп не существует.*

Набросок доказательства. Пусть G – именно такая группа, причём наименьшего возможного порядка. Введём обозначение

$$\#G = p^a q^b.$$

Пусть P – соответствующая силовская $p-$подгруппа, тогда

$$\#P = p^a$$

Известно, что у p-групп нетривиальный центр, поэтому

$$\exists g \in Cen(P) \setminus \{1\}$$

Введём обозначение для *централизатора*

$$C_G(g) := \{x \in G \mid xg = gx\}.$$

Нетрудно понять, что
$$\#^G g = (C_G(g) : G).$$
Однако
$$p^a = \#P \leq \#C_G(g) \Longrightarrow \boxed{\#(^G g) \in q^{\dot{\mathbb{N}}}},$$
а это противоречит следствию из теории характеров.