Независимый Московский Университет, Алгебра-2, весна 2016

1

1.1. Установите канонические изоморфизмы $Z^{Y\times X} \cong \left(Z^Y\right)^X$, $Z^{Y+X} \cong Z^Y \times Z^X$ и $(Z\times Y)^X \cong Z^X \times Y^X$ в категории $\mathcal{AB}$.

1.2*. Для топологических пространств $T, T' \in\in \mathcal{TOP}$ введём на множестве непрерывных отображений $\mathrm{Mor}_{\mathcal{TOP}}(T, T')$ *компактно-открытую* топологию, взяв за её *базу* множества

$$[K, U] := \{f \in \mathrm{Mor}_{\mathcal{TOP}}(T, T') \mid f(K) \subseteq U\}$$

по всем *компактам* $K \subseteq T$ и *открытым множествам* $U \subseteq T'$. На произведениях топологических пространств введём стандартную топологию, порождённую произведениями открытых можеств, а на суммах – топологию несвязного объединения. Какие из изоморфизмов $Z^{Y\times X} \cong \left(Z^Y\right)^X$, $Z^{Y+X} \cong Z^Y \times Z^X$, $(Z\times Y)^X \cong Z^X \times Y^X$ имеют место в категории $\mathcal{TOP}$?

1.3. Установите биекцию между множеством $\mathrm{Mor}_{\mathcal{TOP}}(\mathbf{S}^1, \mathbf{S}^1)$ и множеством непрерывных функций $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, для каждой из которых найдётся такое $n \in \mathbb{Z}$, что $f(x+1) \equiv f(x) + n$ (такие функции называются *квазипериодическими*). [Совет: воспользуйтесь тригонометрией]. Докажите, что в каждом гомотопическом классе отображений $\mathbf{S}^1 \to \mathbf{S}^1$ найдётся отображение, соответствующее $\mathbb{R} \to \mathbb{R} : x \mapsto nx$.

1.4. *Сферой Римана* называется сфера $\mathbf{S}^2$, снабжённая с помощью стереографической проекции биекцией с $\mathbb{C} \coprod \{\infty\}$. Любой многочлен $P \in \mathbb{C}[z]$ определяет отображение $P: \mathbb{C} \to \mathbb{C}$; положив $P(\infty) := \infty$, будем считать его задающим отображение $\underline{P} : \mathbf{S}^2 \to \mathbf{S}^2$. Докажите непрерывность этого отображения. Для каких $P, Q \in \mathbb{C}[z]$ отображения $\underline{P}$ и $\underline{Q}$ гомотопны? [Решение этой задачи – шаг к вычислению группы $\pi_2(\mathbf{S}^2) \simeq \mathbb{Z}$].

1.5. Докажите, что в категории множеств все уравнители мономорфны. Обобщите это утверждение на произвольные топосы.

1.6. Докажите, что в категории множеств любой мономорфизм является уравнителем. Обобщите это утверждение на произвольные топосы.

1.7*. Существует ли классификатор подобъектов в категории $\mathcal{AB}$?

11 февраля, *Г.Б. Шабат*