**Независимый Московский Университет, Алгебра-2,** весна 2016

# 2

**2.1.** Докажите, что композиция мономорфизмов в произвольной категории – мономорфизм.

**2.2.** Пусть $A \overset{\alpha}{\to} B \overset{\beta}{\to} C$ – морфизмы в произвольной категории. Докажите, что из мономорфности $\beta \circ \alpha$ следует мономорфность $\alpha$.

**2.3.** Докажите, что композиция эпиморфизмов в произвольной категории – эпиморфизм.

**2.4.** Пусть $A \overset{\alpha}{\to} B \overset{\beta}{\to} C$ – морфизмы в произвольной категории. Докажите, что из эпиморфности $\beta \circ \alpha$ следует эпиморфность $\beta$.

**2.5.** Докажите, что любой изоморфизм в произвольной категории является одновременно и мономорфизмом, и эпиморфизмом.

**2.6*.** Верно ли утверждение, обратное к **2.5**?

**2.7*.** Верно ли, что в любой конкретной категории каждый эпиморфизм сюръективен? [**Совет.** Рассмотрите вложение $\mathbb{Q} \hookrightarrow \mathbb{R}$ в категории *хаусдорфовых* топологических пространств и непрерывных отображений].

**2.8.** Пусть $\Bbbk$ – поле. Докажите, что морфизм $\alpha : V \to W$ в категории $\Bbbk - \mathcal{VECT}$ является мономорфизмом тогда и только тогда, когда *сопряжённый* морфизм $\alpha^* : W^* \to V^*$ является эпиморфизмом.

**2.9*.** Рассмотрим в мультипликативной группе $\mathbb{C}^\times$ ненулевых комплексных чисел подгруппу $\mathbb{C}_1 := \{z \in \mathbb{C}^\times \mid |z| = 1\}$. Для абелевой группы $A \in\in \mathcal{AB}$ обозначим $\widehat{A} := \mathrm{Mor}_{\mathcal{AB}}(A, \mathbb{C}_1)$ и назовём её группой, *двойственной* к $A$. Введём для морфизма $\alpha : A \to B$ абелевых групп *двойственный* морфизм $\widehat{\alpha} : \widehat{B} \to \widehat{A} : \varphi \mapsto \varphi \circ \alpha$; проверьте, что указанная конструкция задаёт *кофунктор* $\mathcal{AB}^{\ominus} \to\to \mathcal{AB}$ категории абелевых групп в себя. Докажите, что в случае *конечной* группы $A \in\in \mathcal{AB}$ имеют место изоморфизмы $\widehat{A} \simeq A$ и $\widehat{\widehat{A}} \cong A$. Верны ли аналогичные утверждения <u>без</u> предположения конечности? Докажите, что $\alpha : A \to B$ – мономорфизм тогда и только тогда, когда $\widehat{\alpha} : \widehat{B} \to \widehat{A}$ – эпиморфизм.

**2.10.** Пусть $\Bbbk$ – поле. Верно ли, что любой мономорфизм $\alpha : V \to W$ в категории $\Bbbk - \mathcal{VECT}$ является изоморфизмом?

18 февраля, *Г.Б. Шабат*