Независимый Московский Университет, Алгебра-2, весна 2016

4

Далее используются следующие обозначения. Для группы $G \in\in \mathcal{GRP}$ и модуля $N \in\in G\_\mathcal{MOD}$ рассматриваются морфизмы

$$N \xrightarrow{\mathrm{d}_0} N^G \xrightarrow{\mathrm{d}_1} N^{G\times G} \xrightarrow{\mathrm{d}_2} N^{G\times G\times G} \xrightarrow{\mathrm{d}_3} N^{G\times G\times G\times G} \ldots,$$

где

$$\mathrm{d}_0(n) : g \mapsto {}^{g}n - n,$$
$$\mathrm{d}_1(c) : (g_1, g_2) \mapsto {}^{g_1}c(g_2) - c(g_1g_2) + c(g_1),$$
$$\mathrm{d}_2(c) : (g_1, g_2, g_3) \mapsto {}^{g_1}c(g_2, g_3) - c(g_1g_2, g_3) + c(g_1, g_2g_3) - c(g_1, g_2),$$
$$\mathrm{d}_3(c) : (g_1, g_2, g_3, g_4) \mapsto$$
$$\mapsto {}^{g_1}c(g_2, g_3, g_4) - c(g_1g_2, g_3, g_4) + c(g_1, g_2g_3, g_4) - c(g_1, g_2, g_3g_4) + c(g_1, g_2, g_3),$$
$$\ldots .$$

Для $k \in \mathbb{N}$ определяются *абелевы группы*

$$\mathrm{Z}^k(G, N) := \ker(\mathrm{d}_k),\ \mathrm{B}^k(G, N) := \begin{cases} \mathbf{0}, & \text{если } k = 0 \\ \mathrm{im}(\mathrm{d}_{k-1}), & \text{если } k > 0, \end{cases}$$

$$\boxed{\mathrm{H}^k(G, N) := \frac{\mathrm{Z}^k(G, N)}{\mathrm{B}^k(G, N)}}$$

(последняя группа определена в силу задачи **4.1** ниже)

Для точной последовательности G-модулей

$$0 \longrightarrow M' \xrightarrow{\iota} M \xrightarrow{\pi} M'' \longrightarrow 0$$

определим *связывающий морфизм*

$$\delta_k : \mathrm{H}^k(G, M'') \longrightarrow \mathrm{H}^{k+1}(G, M'') : [z]_{\mathrm{B}^k(G,M'')} \mapsto [(\iota^{-1\circ} \circ \mathrm{d}_k \circ \pi^{-1\circ})(z)]_{\mathrm{B}^{k+1}(G,M')}$$

(см. задачу **4.2** ниже)

4.1. Докажите, что $\mathrm{d}_1 \circ \mathrm{d}_0 = 0$, $\mathrm{d}_2 \circ \mathrm{d}_1 = 0$, $\mathrm{d}_3 \circ \mathrm{d}_2 = 0$.

4.2. Проверьте корректность определения δ_1 и δ_2.

4.3. Проведите детальную проверку точности последовательности

$$\mathrm{H}^1(G, M') \xrightarrow{\iota_*} \mathrm{H}^1(G, M) \xrightarrow{\pi_*} \mathrm{H}^1(G, M'') \xrightarrow{\delta_1}$$
$$\xrightarrow{\delta_1} \mathrm{H}^2(G, M') \xrightarrow{\iota_*} \mathrm{H}^2(G, M) \xrightarrow{\pi_*} \mathrm{H}^2(G, M'')$$

4.4. Вычислите $\mathrm{H}^k(\mathsf{C}_2, \mathsf{C}_2)$ при $k = 0, 1, 2$.

4.5. Пусть нетривиальный элемент группы C_2 действует на C_3 взятием обратного. Вычислите $\mathrm{H}^k(\mathsf{C}_2, \mathsf{C}_3)$ при $k = 0, 1, 2$.

17 марта, *Г.Б. Шабат*