6

Далее используются следующие обозначения. Пусть

$$1 \longrightarrow N \xrightarrow{\iota} E \xrightarrow{\pi} G \longrightarrow 1 \qquad (\star)$$

– точная последовательность (вообще говоря, неабелевых) групп, то есть *расширение* группы G с помощью группы N. Действие $E \to \mathrm{Aut}N : e \mapsto (n \mapsto {}^{e}n)$ определяет *внешнее действие* $G \to \mathrm{Out}N : [e]_{\iota(N)} \mapsto [n \mapsto {}^{e}n]_{\mathrm{Int}(N)}$; здесь использованы изоморфизм $G \cong E/\iota(N)$ и определения группы внутренних и внешних изоморфизмов с помощью точной последовательности

$$1 \longrightarrow \mathrm{Zen}(N) \longrightarrow N \longrightarrow \mathrm{Aut}(N) \longrightarrow \mathrm{Out}(N) \longrightarrow 1,$$

в которой $\mathrm{Zen}(N)$ –*центр* группы N, группа внутренних автоморфизмов $\mathrm{Int}N \subseteq \mathrm{Aut}N$ и подразумевается эпиморфизм $N \to \mathrm{Int}N : n \mapsto (x \mapsto {}^{n}x)$. Корректность приведённого определения предлагается проверить в задаче **6.1**.

При заданном произвольном внешнем действии $\alpha : G \to \mathrm{Out}N$ через $\mathrm{EXT}(G, N; \alpha)$ обозначается множество классов *изоморфности* расширений $(\star)$, определяющих это действие.

Фиксировав теоретико-множественное сечение $\sigma : G \dashrightarrow E$, введём $f : G \times G \dashrightarrow \mathrm{Aut}N : (g_1, g_2) \mapsto (n \mapsto {}^{\sigma(g_1)\sigma(g_2)\sigma(g_1g_2)^{-1}}n)$. В силу задачи **6.3** это отображение "поднимается" до отображения $F : G \times G \dashrightarrow N$.

6.1. Проверьте корректность определения внешнего действия, задаваемого расширением групп.
6.2. Докажите, что $f(g_1, g_2)f(g_1g_2, g_3) \equiv {}^{\sigma(g_1)}f(g_2, g_3)f(g_1, g_2g_3)$.
6.3. Докажите, что $f(G \times G) \subseteq \mathrm{Int}N$.
6.4. Установите существование такого $z_\alpha : G \times G \times G \dashrightarrow \mathrm{Zen}(N)$, что $z_\alpha(g_1, g_2, g_3)F(g_1, g_2)F(g_1g_2, g_3) \equiv {}^{\sigma(g_1)}F(g_2, g_3)F(g_1, g_2g_3)$ и проверьте, что $z_\alpha \in \mathrm{Z^3(G, Zen(N))}$. Докажите, что $[z_\alpha] \in \mathrm{H^3(G, Zen(N))}$ не зависит от выбора σ и F.
6.5. Докажите, что $\mathrm{EXT}(G, N; \alpha) \neq \varnothing$ тогда и только тогда, когда $[z_\alpha] = 0 \in \mathrm{H^3(G, Zen(N))}$.
6.6.** Пусть $\mathrm{EXT}(G, N; \alpha) \neq \varnothing$, то есть некоторое расширение вида $(\star)$ существует. С помощью теоретико-множественного "поднятия" $\varphi : G \dashrightarrow \mathrm{Aut}N$ определите групповую операцию на E. Определите действие $\mathrm{H^2(G, Zen(N))}$ на $\mathrm{EXT}(G, N; \alpha)$ и докажите, что оно свободно и транзитивно.

28 апреля, *Г.Б. Шабат*