

**НМУ, 2 курс, дифференциальная геометрия. Листок 8.
Римановы многообразия. 28.03.2016.**

Задача 1. Доказать, что геликоид $\mathbf{r}(u, v) = (u \sin v, u \cos v, av)$ и катеноид $\mathbf{R}(u, v) = \left(\sqrt{a^2 + u^2} \cos v, \sqrt{a^2 + u^2} \sin v, a \ln \frac{u + \sqrt{a^2 + u^2}}{a} \right)$ локально изометричны.

Задача 2. Пусть e_i базис в векторных полях, e^i дуальный к нему базис. Рассмотрим сечение s расслоения $\xi = (E \rightarrow M)$. Формулу $\nabla s = e^i \otimes \nabla_{e_i} s$, где $s \in \Gamma(M, E)$, для связности в расслоении ξ по ошибке иногда пишут как $\nabla s = e^i \wedge \nabla_{e_i} s$, но последняя формула неверна и *для произвольного расслоения ξ не имеет смысла!*

Но есть случай, когда операция $\nabla \wedge s := e^i \wedge \nabla_{e_i} s$ имеет смысл и тоже интересна. Пусть у нас есть симметричная связность ∇ в TM . Распространим эту связность в расслоение внешних форм. Пусть $s \in \Omega(M)$ дифференциальная форма на M . Рассмотрим операцию $\nabla \wedge s := e^i \wedge \nabla_{e_i} s$, где мы смотрим на s как на сечение расслоения ΛT^*M , а не как на форму со значениями в сечениях.

Доказать, что тогда $\nabla \wedge s = ds$, то есть это обычный внешний дифференциал формы s . Чему равно выражение $\nabla \wedge s$ для несимметричной связности ∇ в касательном расслоении TM ?

Задача 3. Если ∇ связность в касательном расслоении TM , то она продолжается до связностей во всех тензорных расслоениях $T_q^p M$. Для простоты будем обозначать эти продолжения связности ∇ тем же символом ∇ . Доказать, что связность ∇ согласована с метрикой $\langle \cdot, \cdot \rangle$ тогда и только тогда, когда $\nabla g = 0$, где g метрический тензор.

Задача 4. Доказать, что тензор Риччи связности Леви-Чивита ∇ является симметрическим, $\text{Ric}(X, Y) = \text{Ric}(Y, X)$.

Задача 5. Доказать, что для симметричной связности ∇ имеет место тождество Бианки

$$(\nabla_X R)(Y, Z, V) + (\nabla_Y R)(Z, X, V) + (\nabla_Z R)(X, Y, V) = 0,$$

где X, Y, Z и V векторные поля. В компонентах это тождество имеет вид

$$\nabla_m R^l_{ij,k} + \nabla_i R^l_{jm,k} + \nabla_j R^l_{mi,k} = 0.$$

Задача 6. Для связности в касательном расслоении доказать следующие тождества:

- первое структурное уравнение Картана $de^i = e^j \wedge \Gamma_j^i + T^i$,
- второе структурное уравнение Картана

$$d\Gamma_i^j = \Gamma_i^k \wedge \Gamma_k^j + F_i^j,$$

- первое тождество Бианки

$$dT^i = -T^j \wedge \Gamma_j^i + e^j \wedge F_j^i,$$

- второе тождество Бианки

$$dF_i^j = \Gamma_i^k \wedge F_k^j - F_i^k \wedge \Gamma_k^j,$$

где e^i дуальный базис к выбранному базису e_i в векторных полях, Γ_j^i локальная 1-форма связности,

$$F_i^j = R_{kl,i}^j e^k \otimes e^l = \sum_{k < l} R_{kl,i}^j e^k \wedge e^l$$

локальная 2-форма кривизны, а T^i локальные 2-формы кручения,

$$T^k = T_{ij}^k e^i \otimes e^j = \sum_{i < j} T_{ij}^k e^i \wedge e^j.$$

Задача 7. Доказать, что из-за многочисленных симметрий тензор Римана на двумерном многообразии полностью определяется своей компонентой $R_{12,2}^1$. Доказать, что на двумерном многообразии верно тождество

$$R = \frac{2R_{12,21}}{g_{11}g_{22} - g_{12}^2}.$$

Задача 8. Рассмотрим двумерную поверхность M в \mathbb{E}^3 с индуцированной метрикой и связностью Леви-Чивита. Пусть K гауссова кривизна M . Доказать, что в данном случае

- $\text{Ric}(X, Y) = K\langle X, Y \rangle$, или, в тензорной записи, $R_{ij} = Kg_{ij}$,
- скалярная кривизна равна удвоенной гауссовой, $R = 2K$.

Задача 9. Доказать, что для n -мерной сферы $\mathbb{S}_r^n \subset \mathbb{E}^{n+1}$ радиуса r тензор Римана можно найти по формуле

$$R(X, Y)Z = \frac{1}{r^2}(\langle Y, Z \rangle X - \langle X, Z \rangle Y),$$

а секционная кривизна не зависит ни от точки, ни от направления, и равна $K = \frac{1}{r^2}$.

Задача 10. Доказать, что левоинвариантная метрика на $O(n)$ порождённая скалярным произведением

$$\langle \xi, \eta \rangle_e = \text{tr } \xi \eta^T \quad (1)$$

на $\mathfrak{so}(n)$, является биинвариантной. Построить биинвариантную метрику на группе Ли $U(n)$.