Независимый Московский Университет, Алгебраические кривые, весна 2017

1

1.1. Найдите особые точки на *конхоиде Никомеда*

$$(x^2 + y^2)(y - a)^2 = r^2$$

и на *циссоиде Диокла*

$$y^2(a + x) = (a - x)^3.$$

Рассмотрев множества прямых, проходящих через них, постройте их *рациональные параметризации.* Придав наугад взятые значения параметрам, найдите на этих кривых несколько *рациональных* точек – то есть точек, *обе* координаты которых рациональны.

1.2. Пользуясь рациональной параметризацией кривой $a^2 + b^2 = c^2$, найдите несколько пифагоровых треугольников и вычислите из площади. Укажите соответствующие рациональные точки на кривых $y^2 = x^3 - S^2x$.

1.3. Найдите на кривой $y(y - 6) = x^3 - x$ из семейства Диофанта IV_{24} бросающиеся в глаза рациональные точки и проведите через них касательные к кривой. Исследуйте пересечения этих касательных и кривой. Через пары уже полученных точек проведите прямые – они и называются *секущими.* Исследуйте пересечения секущих и кривой. Количество рациональных точек на кривой будет расти. Продолжайте, пока не надоест.

При выполнении этого упражнения желательно использовать вычислительную технику и рисовать всё, что происходит.

1.4. Приведите уравнение декартова листа к более стандартному виду $w^2 = z^3 - z^2$. Применив проектирование из особой точки, найдите рациональную параметризацию этой кривой. Рассматривая её как вещественную, дайте определение её *петли* и вычислите площадь области, заключённой внутри петли. Попытайтесь вычислить *длину* петли; когда у вас не получится найти замкнутое выражение для этой длины, с помощью доступных вычислительных средств найдите её приближённое значение.

1.5. Определите формальный ряд $\mathsf{sl} \in \mathbb{Q}[[z]]$ равенством

$$z = \int_0^{\mathsf{sl}z} \frac{\mathrm{d}u}{\sqrt{1 - u^4}}.$$

Вычислите первые 5 коэффициентов этого ряда.

16 февраля, *Г.Б. Шабат*