Независимый Московский Университет, Алгебраические кривые, весна 2017

2

Пусть $\mathbf{V} \subseteq \mathbf{P}_N(\Bbbk)$ – неприводимое проективное многообразие. Дадим три определения *размерности* $\dim \mathbf{V}$.

(1) Пусть $\mathbf{U} \subset \mathbf{V}$ произвольное *аффинное* подмногообразие многообразия $\mathbf{V}$ – например, дополнение к гиперплоскому сечению. Тогда поле рациональных функций $\Bbbk(\mathbf{U})$ не зависит от выбора $\mathbf{U}$ (докажите!) и потому обозначается $\Bbbk(\mathbf{V})$.

$$\dim_1(\mathbf{V}) := \mathrm{trdeg}_{\Bbbk}\Bbbk(\mathbf{V}).$$

(2) Рассмотрим убывающие[1] цепочки подмногообразий в $\mathbf{V}$.

$$\dim_2(\mathbf{V}) := \max\{\delta \mid \exists \text{ неприводимые замкнутые } \mathbf{V} = \mathbf{V}_0 \supset \cdots \supset \mathbf{V}_\delta \neq \varnothing\}.$$

(3) Проекция на проективное подпространство $\pi_O : \mathbf{P}_N(\Bbbk) \setminus \{O\} \to \Pi$ называется *конечной*, если для некоторого непустого открытого подмножества $\mathbf{U} \subseteq \Pi$ имеет место импликация $[P \in \mathbf{U}] \Longrightarrow [\#(\pi_O^{-1\circ} P) < \infty]$.

$$[\dim_3(\mathbf{V}) = \delta] :\Longleftrightarrow [\mathbf{V} = \mathbf{P}_N(\Bbbk) \text{ и } \dim_3(\mathbf{V}) = N] \text{ или}$$
$$[\exists \text{ конечная } \pi_O : \mathbf{V} \to \Pi, \text{ где } \dim \Pi = \delta].$$

2.1. Докажите, что для любого неприводимого проективного многообразия $\mathbf{V} \subseteq \mathbf{P}_N(\Bbbk)$ имеют место равенства $\dim_1(\mathbf{V}) = \dim_2(\mathbf{V}) = \dim_3(\mathbf{V})$.

2.2. (Геометрия квадратных уравнений). Пусть $\mathrm{char}(\Bbbk) \neq 2$. Реализуем $\mathbf{P}_2(\Bbbk)$ как проективизацию векторного пространства квадратных трёхчленов с коэффициентами из $\Bbbk$, и пусть $\mathbf{D} \subset \mathbf{P}_2(\Bbbk)$ – *дискриминантная коника,* то есть множество классов пропорциональности многочленов, имеющих кратный корень. Пусть $P \in \mathbf{P}_2(\Bbbk) \setminus \mathbf{D}$; проведём из P касательные к $\mathbf{D} \subset \mathbf{P}_2(\Bbbk)$. Что можно сказать о точках касания?

2.3. (Геометрия кубических уравнений, линейно зависящих от параметра). Пусть $\mathrm{char}(\Bbbk) \neq 2, 3$. Реализуем $\mathbf{P}_3(\Bbbk)$ как проективизацию векторного пространства кубических многочленов с коэффициентами из $\Bbbk$, и пусть $\ell \subset \mathbf{P}_3(\Bbbk)$ – *общая* прямая. Для каждой $P \in \ell$ с корнями $\alpha, \beta, \gamma \in \Bbbk$ рассмотрим в $\mathbf{P}_2(\Bbbk)$ треугольник с вершинами, соответствующими по конструкции задачи **2.2** многочленам с парами корней (α, β), (α, γ) и (β, γ). Докажите, что, когда P движется по ℓ, вершины этого треугольника движутся по некоторой конике.

3 марта, *Г.Б. Шабат*

[1]символ $\supset$ означает *строгое* включение