Независимый Московский Университет, Алгебраические кривые, весна 2017

3

Для коммутативной группы A введём обозначение $\dot{A} := A \setminus \{0_A\}$.
Введём множество *ориентированных параллелограммов*

$$\mathcal{P} := \{ \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \end{pmatrix} \in \dot{\mathbb{C}} \times \dot{\mathbb{C}} \mid \mathrm{Im}\Big(\frac{\lambda_1}{\lambda_2}\Big) > 0\}$$

и множество *решёток*

$$\mathcal{L} := \{\Lambda \subset \mathbb{C} \mid \Lambda \text{ – дискретная аддитивная подгруппа ранга } 2\}.$$

Верхняя полуплоскость обозначается

$$\mathcal{H} := \{\tau \in \mathbb{C} \mid \mathrm{Im}(\tau) > 0\}.$$

3.1. Докажите, что формула $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} a\lambda_1 + b\lambda_2 \\ c\lambda_1 + d\lambda_2 \end{pmatrix}$ определяет свободное и дискретное действие $\mathsf{SL}_2(\mathbb{Z})$ на $\mathcal{P}$.
3.2. Постройте биекцию $\frac{\mathcal{P}}{\mathsf{SL}_2(\mathbb{Z})} \cong \mathcal{L}$.
3.3. Определив очевидное действие $\mathbb{C}^\times$ на $\mathcal{P}$ *гомотетиями* и установив очевидную биекцию $\frac{\mathcal{P}}{\mathbb{C}^\times} \overset{\cong}{\to} \mathcal{H} : [\begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \end{pmatrix}]_{\mathbb{C}^\times} \mapsto \frac{\lambda_1}{\lambda_2}$, убедитесь, что **3.1** определяет *эффективное* действие группы $\mathsf{PSL}_2(\mathbb{Z}) := \mathsf{SL}_2(\mathbb{Z})/\pm\mathbf{1}$ на $\mathcal{H}$ дробно-линейными преобразованиями $\tau \mapsto \frac{a\tau+b}{c\tau+d}$. Дискретно ли это действие? Свободно ли оно? Снабдив $\mathcal{H}$ метрикой $(\mathrm{d}s)^2 = -\frac{\mathrm{d}\tau \mathrm{d}\overline{\tau}}{(\tau-\overline{\tau})^2}$, убедитесь, что $\mathsf{PSL}_2(\mathbb{Z})$ действует на $\mathcal{H}$ *изометриями.*
3.4. Постройте *область Дирихле-Вороного* точки $2\mathrm{i} \in \mathcal{H}$, то есть множество таких $\tau \in \mathcal{H}$, которые ближе к $2\mathrm{i}$, чем к любой *другой* точке $\mathsf{PSL}_2(\mathbb{Z})$-орбиты точки $2\mathrm{i}$.
3.5. Проверьте для $k \in \mathbb{N}_{\geq 2}$ сходимость *рядов Эйзенштейна*

$$\mathrm{G}_k : \mathcal{L} \longrightarrow \mathbb{C} : \Lambda \mapsto \sum_{\lambda \in \dot{\Lambda}} \frac{1}{\lambda^{2k}}.$$

3.6. *Нормализованные ряды Эйзенштейна* определяются для $k \in \mathbb{N}_{\geq 2}$ как (голоморфные) функции $\mathrm{E}_k : \mathcal{H} \to \mathbb{C}$ формулой $\mathrm{E}_k(\tau) := \frac{\mathrm{G}_k(\mathbb{Z}\tau+\mathbb{Z})}{2\zeta(2k)}$, где $\zeta(s) := \sum_{n=1}^{\infty}$ – дзета-функция Римана. Докажите формулу

$$\boxed{\mathrm{E}_k(\tau) = 1 + \frac{(-1)^k}{(2k-1)!} \frac{(2\pi)^{2k}}{\zeta(2k)} \sum_{\mu=1}^{\infty} \sigma_{2k-1}(\mu) \mathrm{e}^{2\pi \mathrm{i} \mu \tau}}$$

в которой используется *сумма степеней делителей* $\sigma_K(\mu) := \sum_{d|\mu} d^K$.
<u>Указание</u>. Суммируйте слагаемые в $\mathrm{G}_k(\tau) = \sum \frac{1}{(m\tau+n})^{2k}$ по горизонталям, доказав по индукции $\sum_{n\in\mathbb{Z}} \frac{1}{(T+n)^\kappa} = \frac{(-1)^\kappa (2\pi \mathrm{i})^\kappa}{(\kappa-1)!} \sum_{j=1}^{\infty} j^{\kappa-1} \mathrm{e}^{2\pi \mathrm{i} j T}$.

23 марта, *Г.Б. Шабат*