Независимый Московский Университет, Алгебраические кривые, весна 2017

6

В задачах этого листка главное действующее лицо – *гиперэллиптическая кривая* $\ddot{\mathbf{X}}$ (рода 2), заданная в аффинных координатах (u, v) уравнением

$$v^2 = F \in \Bbbk[u],$$

где многочлен

$$F = u^6 + a_5u^5 + a_4u^4 + a_3u^3 + a_2u^2 + a_1u + 1$$

не имеет кратных корней. Точки $O^\pm \in \ddot{\mathbf{X}}$ определяются условиями $u(O^\pm) = 0, v(O^\pm) = \pm 1$.

6.1. Проверьте гладкость аффинной кривой $\ddot{\mathbf{X}}$.
6.2. Рассмотрите проективное замыкание кривой $\ddot{\mathbf{X}}$ в $\mathbf{P}_2(\Bbbk)$, найдите особенности полученной кривой и разрешите их.

6.3. Рассмотрите рациональные функции $U, V \in \Bbbk(\ddot{\mathbf{X}})$, определённые формулами $(U, V) = (\frac{1}{u}, \frac{v}{u^3})$. Выпишите полиномиальное соотношение между U и V; обозначьте $\ddot{\mathbf{X}}_\infty$ соответствующую аффинную кривую и на ней точки $\underline{\infty}^\pm$, определённые условиями $U(\underline{\infty}^\pm) = 0, V(\underline{\infty}^\pm) = \pm 1$. Каков образ *регулярного* отображения $U \times V : \ddot{\mathbf{X}} \setminus \{O^\pm\} \to \ddot{\mathbf{X}}_\infty$?
6.4. Установите существование *гладкой полной* кривой $\mathbf{X} = \ddot{\mathbf{X}} \bigcup \ddot{\mathbf{X}}_\infty$, покрытой двумя аффинными картами $\ddot{\mathbf{X}}$ и $\ddot{\mathbf{X}}_\infty$, склеенными с помощью соотношений из предыдущей задачи.

6.5. Для произвольных точек P_1, P_2, P_3 постройте непостоянную функцию $f \in \mathrm{L}(P_1 + P_2 + P_3) \setminus \Bbbk$. **Совет.** В случае точек общего положения воспользуйтесь простейшим вариантом *интерполяционной формулы Лагранжа.*
6.6. Рассмотрите в карте $\ddot{\mathbf{X}}$ дифференциалы, заданные формулой $\omega_i := \frac{u^{i-1}\mathrm{d}u}{v}$. Докажите, что при $i \in \{1, 2\}$ эти дифференциалы регулярны на всей кривой $\mathbf{X}$.

6.7. Найдя корень α многочлена $F = (u - \alpha)G$, введите координату $x = \frac{1}{u-\alpha}$ и с её помощью постройте аффинную модель $\dot{\mathbf{X}}$ поля $\Bbbk(\mathbf{X})$ вида $y^2 = H \in \Bbbk[x]$, где H – многочлен степени 5 без кратных корней. Установите изоморфизм $\dot{\mathbf{X}} \simeq \mathbf{X} \setminus \{\underline{\infty}\}$ для некоторой точки $\underline{\infty} \in \mathbf{X}$.
6.8. Покажите, что в обозначениях предыдущей задачи линейная система $\mathrm{L}(5\underline{\infty})$ задаёт вложение кривой $\mathbf{X} \hookrightarrow \mathbf{P}_3(\Bbbk)$ в качестве пространственной квинтики.

20 апреля, *Г.Б. Шабат*