НМУ, гармонические отображения

Экзамен. 20.05.2017.

Экзамен является домашним письменным. Решение необходимо не позднее 5 июня 2017 года оставить в моей ячейке в учебной части или на вахте в конверте с фамилией Пенской, или же прислать мне по электронной почте.

Задача 1. Опишите все гармонические отображения между двумерными торами.

Указание: используйте тот факт, что любая метрика на торе конформно эквивалентна метрике на $\mathbb{R}^2/\Gamma$, *полученной из евклидовой метрики на* $\mathbb{R}^2$.

Задача 2. Опишите голоморфные квадратичные дифференциалы на двумерных торах.

Задача 3. Пусть Σ риманова поверхность и $H : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}$ гладкая функция. Пусть $z = x + iy$ конформный параметр на Σ. Пусть $f : \Sigma \longrightarrow \mathbb{R}^3$ решение уравнения

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}\right) f = 2H(f(z))[f_x(z), f_y(z)],$$

где $[\,,]$ — векторное произведение в $\mathbb{R}^3$. Докажите, что если f конформное, то тогда $H(f(z))$ является средней кривизной поверхности $f(\Sigma)$ в точке $f(z)$. Докажите, что если $\Sigma = \mathbb{S}^2$, то тогда любое решение f конформно.

Задача 4. Рассмотрим функции

$$\begin{aligned} f_1 &= \sqrt{3}\, xz, \\ f_2 &= \sqrt{3}\, yz, \\ f_3 &= \frac{1}{2}(2z^2 - x^2 - y^2), \\ f_4 &= \sqrt{3}\, xz, \\ f_5 &= \frac{\sqrt{3}}{2}(x^2 - y^2). \end{aligned}$$

на единичной сфере $\mathbb{S}^2$, заданной уравнением $x^2 + y^2 + z^2 = 1$.

Проверьте, что эти функции являются собственными функциями оператора Лапласа-Бельтрами на сфере, найдите соответствующее собственное число и его номер (с учётом кратности).

Задача 5. Рассмотрим отображение $f : \mathbb{S}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^5$, где f имеет компоненты $f_1, \ldots, f_5$ из предыдущей задачи. Проверьте, что образ лежит на единичной сфере $\mathbb{S}^4 \subset \mathbb{R}^5$. Докажите, что отображение $f : \mathbb{S}^2 \longrightarrow \mathbb{S}^4$ гармоническое и найдите его гармоническую степень.