Теорема ван Кампена

6◇1. Докажите, что абелианизацией группы $\mathbb{Z}_2 * \mathbb{Z}_2$ является $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$, и опишите ядро гомоморфизма абелианизации $\mathbb{Z}_2 * \mathbb{Z}_2 \to \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$.

6◇2. Покажите, что гомоморфизм $\Phi\colon *_\alpha \pi_1(A_\alpha) \to \pi_1(X)$ может быть не сюръективным, если не все пересечения $A_\alpha \cap A_\beta$ линейно связны.

6◇3. Пусть даны гомоморфизмы групп $f_1\colon H \to G_1$ и $f_2\colon H \to G_2$. Определим *амальгамированное произведение* $G_1 *_H G_2$ групп G_1 и G_2 над H как факторгруппу свободного произведения $G_1 * G_2$ по нормальной подгруппе, порождённой всеми элементами вида $f_1(h)f_2(h)^{-1}$, где $h \in H$.
Докажите, что $G_1 *_H G_2$ входит в кодекартов квадрат

$$\begin{tikzcd} H \arrow[r, "f_1"] \arrow[d, "f_2"] & G_1 \arrow[d] \\ G_2 \arrow[r] & G_1 *_H G_2. \end{tikzcd}$$

6◇4. Пусть $X = A_1 \cup A_2$, где X — клеточное пространство, A_1, A_2 — клеточные подпространства, причём пересечение $B = A_1 \cap A_2$ связно и содержит отмеченную точку $x_0 \in X$, которая является нульмерной клеткой. Мы имеем кодекартов квадрат

$$\begin{tikzcd} B \arrow[r, "i_1"] \arrow[d, "i_2"] & A_1 \arrow[d, "j_1"'] \\ A_2 \arrow[r, "j_2"] & X, \end{tikzcd}$$

Вычисляя фундаментальные группы всех пространств в этой диаграмме и применяя универсальное свойство амальгамированнго произведения (см. предыдущее упражнение), мы получаем диаграмму

$$\begin{tikzcd} \pi_1(B) \arrow[r, "(i_1)_*"] \arrow[d, "(i_2)_*"] & \pi_1(A_1) \arrow[d] \arrow[ddr, bend left, "(j_1)_*"] & \\ \pi_1(A_2) \arrow[r] \arrow[drr, bend right, "(j_2)_*"'] & \pi_1(A_1) *_{\pi_1(B)} \pi_1(A_2) \arrow[dr, dashed, "h"] & \\ & & \pi_1(X) \end{tikzcd}$$

Используя теорему ван Кампена, докажите, что гомоморфизм

$$h\colon \pi_1(A_1) *_{\pi_1(B)} \pi_1(A_2) \to \pi_1(A_1 \cup_B A_2)$$

является изоморфизмом (мы имеем $X = A_1 \cup_B A_2$). Таким образом, функтор π_1 переводит амальгамы клеточных пространств в амальгамы групп.

6◇5. Найти фундаментальную группу дополнения окружности в $\mathbb{R}^3$.

6◇6. Докажите, что дополнение двух незацепленных окружностей в $\mathbb{R}^3$ не гомеоморфно дополнению двух зацепленных окружностей.

6◇7. Найти фундаментальную группу дополнения трёх координатных осей в $\mathbb{R}^3$.