Теорема ван Кампена II

7◇1. Линейно связное пространство X называется *односвязным*, если $\pi_1(X) = 0$. Докажите, что всякое односвязное клеточное пространство гомотопически эквивалентно клеточному пространству с одной 0-мерной клеткой и без 1-мерных клеток.

7◇2. Пусть P_g — проективная плоскость с g ручками, а K_g — бутылка Клейна с g ручками. Докажите, что **а)** $\pi_1(P_g) \cong \langle c_1, \dots, c_{2g+1} | c_1^2 \cdot \dots \cdot c_{2g+1}^2 = 1 \rangle$,
б) $\pi_1(K_g) \cong \langle c_1, \dots, c_{2g+2} | c_1^2 \cdot \dots \cdot c_{2g+2}^2 = 1 \rangle$.
в) Опишите абелианизацию этих групп и выведите отсюда, что поверхности S_g, P_g, K_g попарно не гомеоморфны.
Указание. Начните со случая $g = 0$.

7◇3. Докажите, что всякая группа является фундаментальной группой некоторого клеточного пространства.

7◇4. а) Вычислите фундаментальную группу дополнения к трилистнику (см. листок 3).
Указание. Трилистник является оборазом вложения $S^1 \xrightarrow{z \mapsto (z^2, z^3)} S^1 \times S^1 \subset \mathbb{R}^3$.
б) Покажите, что дополнения к трилистнику и к стандартно вложенной окружности не гомотопически эквивалентны.