НМУ, 2 курс, дифференциальная геометрия. Листок 9.
Геодезические. 19.04.2019.

Задача 1. Построить пример такого связного риманова многообразия M и точки $A \in M$, что экспоненциальное отображение $\exp_A : T_A M \longrightarrow M$ не является

- сюръективным,
- инъективным.

Задача 2. Докажите, что в геодезических координатах, центрированных в точке p, символы Кристоффеля в точке p обращаются в ноль (в других точках, в общем-то, это неверно).

Докажите, что центрированные в точке p координаты $x^1, \ldots, x^n$, определённые в окрестности U, являются геодезическими координатами, центрированными в точке p, тогда и только тогда, когда $\Gamma^i_{jk} x^j x^k \equiv 0$ тождественно по $x^1, \ldots, x^n$ в U. *Указание. Обратите внимание на то, что в геодезических координатах, центрированных в точке p, геодезические, проходящие через точку p, имеют вид $x^i = a^i t$.*

Задача 3. Интегрируя уравнение геодезических, найти все геодезические на плоскости Лобачевского *как непараметризованные кривые.* Можно взять любую из моделей плоскости Лобаческого, например верхнюю полуплоскость с метрикой $\dfrac{dx^2 + dy^2}{y^2}$. *Указание. Очевидно, что $I_1 = \dfrac{\dot{x}^2 + \dot{y}^2}{y^2}$ является первым интегралом. Найдите второй первый интеграл.*

Задача 4. Докажите, что в полугеодезических координатах $x^1, \ldots, x^n$, то есть в таких координатах, в которых метрика имеет вид

$$\sum_{1 \leqslant i,j \leqslant n-1} g_{ij} dx^i dx^j + (dx^n)^2,$$

кривые $x^1 = \mathrm{const}, \ldots, x^{n-1} = \mathrm{const}$ являются геодезическими с параметром $t = x^n$.

Задача 5. Докажите, что геодезическая $\exp_p(tv)$ и геодезическая сфера $\exp_p(S_\delta)$, где $S_\delta = \{v \in T_p M | |v| = \delta\}$, всегда ортогональны друг другу.

Задача 6. Докажите, что геодезические в $\mathbb{R}^n$ (с евклидовой метрикой) не имеют сопряженных точек.

Задача 7. Докажите, что северный и южный полюс сферы $\mathbb{S}^n$ являются сопряжёнными точками вдоль дуги большого круга кратности $n - 1$.

Задача 8. Найдите явно якобиевы поля вдоль геодезических на сфере $\mathbb{S}^n$ в подходящем базисе векторных полей.

Задача 9. Докажите, что на многообразии отрицательной секционной кривизны геодезические не содержат сопряжённых точек.

Задача 10. Пусть X — левоинвариантное векторное поле на группе Ли с биинвариантной метрикой. Доказать, что любая интегральная кривая[1] векторного поля X является геодезической.

[1] Для тех, кто забыл анализ на многообразиях, напомним, что интегральной кривой векторного поля X называется такая кривая, что в каждой её точке вектор скорости кривой равен значению векторного поля X в этой точке.