

ЭКЗАМЕН 25-27 МАЯ 2020

*Задача 1.* а) Докажите теорему Лиувилля (ограниченная в  $\mathbb{C}$  голоморфная функция постоянна) с помощью дифференциальной формы  $\frac{f(z)dz}{(z-a)(z-b)}$ ;

б) Верно ли, что угол, под которым виден отрезок на плоскости, – гармоническая функция вне прямой, содержащей этот отрезок?

*Задача 2.* Функция  $f$  голоморфна в открытом круге. Может ли она стремиться к бесконечности при подходе к любой точке граничной окружности?

*Задача 3.* Вычислите интеграл

$$\int_0^{+\infty} \frac{\ln(x)dx}{(x+1)^2\sqrt{x}}.$$

*Задача 4.* Голоморфная функция  $f$  в диске  $|z| \leq 1$  удовлетворяет для всех  $z$  из этого круга соотношению  $(\operatorname{Re}f(z))^4 - (\operatorname{Im}f(z))^3 = (\operatorname{Im}(z))^2$ . Существует ли такая функция  $f$ , что  $f'(1/2) = 2$ ?

*Задача 5.* а) Найти число нулей многочлена  $2z^5 - 5z^3 + 2$  вне круга  $|z| < 1$ .

б) Найти число нулей многочлена  $z^6 - z^4 + 4z - 1$  в кольце  $1 < |z| < 2$ .

*Задача 6.* Рассмотрим многочлен  $h(z) = \prod(z - z_i)$ ,  $z_1, \dots, z_n$  – различные точки в  $\mathbb{C}$ . Докажите, что

$$\sum \frac{P(z_i)}{h'(z_i)} = 0,$$

для любого многочлена  $P$ , такого что  $\deg P < \deg h - 1$ .

*Задача 7.* Голоморфная в  $\mathbb{C}$  функция  $f$  удовлетворяет неравенству  $f(z) \leq Ce^{|z|}$  для некоторой константы  $C > 0$  и всех  $z$ . Может ли последовательность  $f^{(n)}(0)/\sqrt{n}$  быть неограниченной?

*Задача 8.* Пусть голоморфная в открытом диске функция  $f$  имеет в нем два нуля. Верно ли, что производная  $f'$  имеет ноль в этом диске?

*Задача 9.* Пусть  $x_1 < x_2 < x_3$  действительные числа. Рассмотрим многочлен  $P_3(x) = (x - x_1)(x - x_2)(x - x_3)$ .

а) Является ли замыкание в  $\mathbb{C}P^2$  кривой, заданной в стандартной карте  $\mathbb{C}^2 \subset \mathbb{C}P^2$  уравнением  $y^2 = P_3(x)$ , гладким подмногообразием?

б) Верно ли, что

$$\int_{x_1}^{x_2} \frac{dx}{\sqrt{P_3(x)}} = \int_{x_3}^{+\infty} \frac{dx}{\sqrt{P_3(x)}}?$$

*Задача 10.* Пусть две неособые гиперповерхности в  $\mathbb{C}P^3$ , заданные уравнениями степени два, трансверсально пересекаются. Найдите род пересечения.