Лекция k.

Лемма Шварца

Леммой Шварца называют следующее утверждение:

Пусть функция f голоморфна в открытом единичном круге $D = \{z||z| < 1\}$. Пусть, кроме того, $|f| < 1$ и $f(0) = 0$. Тогда при любом z из круга $|f(z)/z| \leq 1$. Если где-то в ненулевой точке достигается равенство в этом неравенстве, то $f(z) = kz$ с константой k, модуль которой равен единице.

Рассмотрим функцию $f(z)/z$ на замкнутом круге радиуса $r < 1$ с центром в нуле. Тут важно заметить, что она продолжается по непрерывности в ноль и голоморфна в нуле. На границе она не больше $1/r$. Следовательно, на всем этом круге $|f(z)/z| \leq 1/r$. Искомое в лемме неравенство получается предельным переходом. Если где-то в ненулевой точке z_0 есть равенство $|f(z_0)| = |z_0|$, то $f(z)/z$ постоянна во всем круге D, то есть $f(z)/z = k$

Ряды Лорана

Часто приходится рассматривать следующие функции – тоже заданные рядом, но не степенным как мы привыкли, а степенным с ненулевыми коэффициентами при отрицательных показателях степени.

Рассмотрим формальный ряд

$$\sum_{n \in \mathbb{Z}} a_n z^n.$$

Такой ряд называется рядом Лорана.

Что такое его сумма? Нужно разделить его на две части – с неотрицательными показателями степени и с отрицательными показателями. Первый, как мы уже знаем, абсолютно и равномерно сходится в любом компакте лежащем круге $|z| < r_1$ (r_1 – радиус сходимости этого ряда) и является голоморфной функцией в этом открытом круге. Со вторым чуть хитрее – надо рассмотреть $\sum\limits_{n<0} a_n z^n$ и подставить $1/u$ вместо z. Тогда получим голоморфную функцию от переменной u в круге $|u| < R_1$.

Стало быть $\sum\limits_{n<0} a_n z^n$ есть композиция этой функции и голоморфного вне нуля отображения $z \to 1/z$. Второй абсолютно и равномерно сходится в любом компакте лежащем в кольце $|z| > r_2 = 1/R_1$ и является голоморфной функцией в этом кольце. Таким образом исходный ряд

$$\sum_{n\in\mathbb{Z}} a_n z^n.$$

абсолютно и равномерно сходится на любом компакте лежащем в кольце $r_2 < |z| < r_1$ к голоморфной функции на этом кольце. Конечно, это имеет смысл только если $r_2 < r_1$.

Говорят что функция f разлагается в кольце $r_2 < |z| < r_1$ в ряд Лорана если найдется такой ряд Лорана, который сходится в этом кольце (части с отрицательными и неотрицательными показателями). Можно добавить и о сходимости – абсолютной и равномерной на любом подкомпакте или даже достаточно любом замкнутом подкольце, так как каждый подкомпакт содержитсмя в таком подкольце.

Покажем, что ряд Лорана единственен, если он есть. Действительно – рассмотрим ограничение функции на окружность $|z| = r, r_2 < r < r_1$. Тогда ряд

$$\sum_{n\in\mathbb{Z}} a_n z^n.$$

абсолютно и равномерно сходится на этой окружности, умножив на $e^{-in\varphi}$ и проинтегрировав получаем

$$a_n r^n = \frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi} e^{-in\varphi} f(re^{i\varphi})d\varphi$$

так что коэффициенты однозначно заданы функцией.

Теорема. Любая функция голоморфная в кольце $r_2 < |z| < r_1$ раскладывается в нем в ряд Лорана. В самом деле рассмотрим интегральную формулу Коши для чуть уменьшенного кольца, для z лежащих в этом уменьшенном кольце

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\gamma_1} \frac{f(t)dt}{t-z} - \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\gamma_2} \frac{f(t)dt}{t-z}$$

тут γ_1 – внешняя, а γ_2 – внутренняя граница.

В первом из этих интегралов

$$\frac{1}{t-z} = \sum_{n\geq 0} \frac{z^n}{t^{n+1}}$$

и потому

$$\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\gamma_1}\frac{f(t)dt}{t-z}=\sum_{n\geq 0}\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\gamma_1}\frac{f(t)dt}{t^{n+1}}z^n$$

Во втором интеграле надо чуть хитрее разобраться с прогрессией

$$\frac{1}{t-z}=-\frac{1}{z}\frac{1}{1-t/z}=-\sum_{n<0}\frac{z^n}{t^{n+1}}$$

и мы можем заменить на этот ряд. Получаем, что второй интеграл дает нам

$$-\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\gamma_2}\frac{f(t)dt}{t-z}=\sum_{n<0}\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\gamma_2}\frac{f(t)dt}{t^{n+1}}z^n.$$

Мы видим, что голоморфная в кольце $r_2<|z|<r_1$ функция раскладывается в сумму функции f_1 голоморфной в круге $|z|<r_1$ и в f_2 голоморфной в бесконечном кольце $r_2<|z|$. Такое разложение не единственно, можно добавить к первой функции z а из второй отнять, например. Если предположить, что f_2 стремится в ноль в бесконечности, то это разложение есть и единственно.

Действительно, ряд Лорана дает такое разложение в сумму двух функций (проверьте!). Для второго такого разложения имеем $f=f_1+f_2=g_1+g_2$. Следовательно: $f_1-g_1=g_2-g_1$ и мы получаем голоморфную функции на всей прямой $\mathbb{C}$ равную в круге $|z|<r_1$ f_1-g_1 и g_2-g_1 в $|z|>r_2$. Она стремится к нулю в бесконечности и следовательно тождественно равна нулю.

Изолированные особые точки.

Пусть функция f определена в проколотом диске $0<|z|<r$. Оказывается ее можно продолжить в ноль до голоморфной функции если она ограничена в некоторой проколотой окрестности нуля.

Имеем, для коэффициентов ряда Лорана мы видели соотношение

$$a_nr^n=\frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi}e^{-in\varphi}f(re^{i\varphi})d\varphi$$

поэтому если модуль функции ограничен константой C в некоторой проколотой окрестности нуля то

$$|a_n|\geq\frac{C}{r^n}$$

где при отрицательных n получаем $a_n = 0$ и ряд Лорана есть ряд Тейлора.

Отношение двух голоморфных функций называется мероморфной функцией. Покажите, что в ряду Лорана мероморфной функции есть только конечное число ненулевых членов с отрицательными показателями. Если функция не слишком быстро растет в нуле то она мероморфна (покажите). Полюсом называется особенность мероморфной функции.

Функция называется мероморфной в бесконечности если найдется такое натуральное n и положительные константы C и R, что на окружности произвольного радиуса $R_1 > R$ функция меньше по модулю чем CR_1^n.

Задача. Покажите, что мероморфная в $\mathbb{C}$ функция рациональна, то есть отношение двух многочленов.

Бывает еще случай функции определенной в окрестности нуля и такой что в ряде Лорана конечное число членов с отрицательным показателем. Такая особая точка называется существенно особой точкой.

Теорема Сохоцкого-Вейерштрасса.

Первый замечательный результат о поведении функции в существенно особой точке, это следующая теорема Сохоцкого-Вейерштрасса:

Если 0 изолированная существенная особенность функции f, то образ любой проколотой окрестности нуля всюду плотен в $\mathbb{C}$.

Доказательство. От противного – пусть окрестность точки a не пересекается с образом некоторой проколотой окрестности нуля, то есть

$$|f(z) - a| > r$$

при $0 < |z| < \varepsilon$. Рассмотрим функцию

$$\frac{1}{f(z) - a} = g(z).$$

Она, наоборот, ограничена в проколотой окрестности нуля. Как мы знаем такая функция продолжается в ноль до голоморфной функции. Функция

$$f(z) = \frac{1}{g(z)} + a$$

есть отношение двух голоморфных и следовательно мероморфна и следовательно у нее ноль не существенно особая точка. Утверждение доказано.