Лекция $k+4$.

Автоморфизмы комплексной прямой, круга и сферы Римана

Как мы уже видели комплексная прямая $\mathbb{C}$ и открытый круг это разные комплексные многообразия. В самом деле, на комплексном круге много голоморфных непостоянных функций, а на прямой их нет. Сейчас мы изучим автоморфизмы (то есть голоморфные обратимые отображения) $\mathbb{C}$ в себя и докажем еще раз, что это разные многообразия.

Группа автоморфизмов $\mathbb{C}$ состоит из аффинных преобразований

$$z \mapsto az + b.$$

Причем $a \neq 0$.

Докажем это. Рассмотрим автоморфизм $f\colon \mathbb{C} \to \mathbb{C}$. Бесконечно удаленная точка на сфере Римана не может быть существенно особой точкой для f, так как образ любой проколотой окрестности существенно особой точки должен быть всюду плотен, а для автоморфизма этого не может быть. Следовательно, функция f является многочленом (почему?). Это может быть только многочлен первой степени – многочлены другой степени не могут быть автоморфизмами.

Автоморфизмы сферы Римана. Автоморфизмы сферы Римана это дробно-линейные преобразования $z \mapsto \frac{az+b}{cz+d}$. В самом деле, каждое такое непостоянное отображение это автоморфизм сферы Римана и такие автоморфизмы образуют группу относительно композиции. Любой автоморфизм это композиция некоторого автоморфизма, оставляющего неподвижной бесконечно-удаленную точку, и дробно-линейного отображения. Автоморфизмы, оставляющие неподвижной бесконечно-удаленную точку мы уже знаем – это аффинные преобразования (частный случай дробно-линейных). Следовательно, автоморфизм сферы Римана есть композиция дробно-линейного отображения и аффинного, а это есть дробно-линейное отображение.

Изучим теперь автоморфизмы единичного круга $D = \{z||z| < 1\}$. Для начала рассмотрим автоморфизмы, сохраняющие ноль. Покажем, что это только повороты $f(z) = az$, $|a| = 1$. Действительно, по лемме Шварца $|z| \leqslant |f(z)|$ при всех z в круге D. С другой стороны, из утверждения

леммы Шварца для обратного отображения f^{-1} получаем $|z| \geqslant |f(z)|$ при всех $z \in D$. Значит $|f(z)| = |z|$ и (из той же леммы Шварца) $f(z) = az$, $|a| = 1$. Докажите теперь, что группа всех автоморфизмов круга состоит из (только из) отображений вида

$$e^{i\varphi}\frac{z+z_0}{1+\bar{z}_0 z},$$

где $\varphi \in [0, 2\pi[$, $|z_0| < 1$. Заметим, что ряд такого отображения в нуле начинается с $e^{i\varphi}(z+z_0)(1-\bar{z}_0 z) = e^{i\varphi}z_0 + z(e^{i\varphi})(1-\bar{z}_0 z_0) + ...$ Его производная не больше 1. Найдите автоморфизмы вехней полуплоскости.

Теорема Римана. План доказательства.

Мы будем доказывать следующую теорему: пусть есть область U (открытое подмножество прямой) в $\mathbb{C}$ которая связна, односвязна и не $\mathbb{C}$. Тогда эта область изоморфна открытому диску D. Очень краткий план доказательства таков: мы покажем, что теорему достаточно показать для ограниченных областей, содержащихся в единичном круге, и содержащих ноль – $0 \in U \subset D$. Рассмотрим множество всех однолистных голоморфных функций на U (функция однолистна, если значения в разных точках разные), принимающих значения в D. Мы покажем, что среди этих функций можно найти функцию с максимальным по модулю значением производной в нуле. Эта экстремальная функция осуществит искомый изоморфизм.

Непрерывные и голоморфные функции.

Для реализации этого плана нам понадобятся следующие топологические рассуждения. Нам понадобится пространство $C = C(U)$ непрерывных комплекснозначных функций в области U. Будем говорить, что последовательность (f_n) функций из $C(U)$ сходится, если равномерно сходится ее ограничение на любой компакт, лежащий в U. Проверьте, что (поточечный) предел в случае сходимости также является непрерывной функией, то есть лежит в $C(U)$.

В линейном пространстве $C(U)$ лежит подпространство $H(U)$ голоморфных функций. Покажем, что это замкнутое подпространство, относительно рассмотренной сходимости, то есть если голоморфные функции f_n сходятся равномерно на любом компакте к функции f, то их предел является голоморфной функцией. В самом деле, нужно показать, что форма $f(z)dz$ замкнута, а это будет следовать из того, что ее интеграл по (границе) прямоугольнику равен нулю, но на этой границе f есть

равномерный предел функций f_n для которых интеграл формы $f_n(z)dz$ равен нулю. Значит форма $f(z)dz$ замкнута, а значит f голоморфна.

Следующий замечательный факт таков: предел голоморфных функций можно дифференцировать: если $\lim f_n = f$, то последовательность f_n' сходится и $\lim f_n' = f'$. Это вытекает из того, что для f' есть интегральная формула, содержащая f, а именно

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\gamma_r} \frac{f(t)dt}{t-z},$$

где γ_r окружность радиуса r, при всех z в круге меньшего радиуса чем r с тем же центром, что и γ_r, по формуле Коши. Дифференцируя получаем

$$f'(z) = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\gamma_r} \frac{f(t)dt}{(t-z)^2}.$$

Значит, если $f_n \to f$, то для данного компакта $K \subset U$ его можно покрыть конечным числом меньших кругов так что покрытие большими кругами, ограниченными окружностями γ_r все еще содержится в U. В этих меньших кругах сходимость производной есть и равномерная. Следовательно, она есть и на K.

Однолистные функции.

Будем считать, что область U связна. Рассмотрим сходящуюся последовательность голоморфных функций (f_n). Пусть все функции из этой последовательности были однолистны. Покажем, что предельная функция f или постоянна или однолистна. Пусть f непостоянна и значение a оно принимает не меньше двух раз в точках z_1, z_2. Тогда

$$\frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\partial U_r} \frac{f'(t)dt}{f(t)} \geqslant 2$$

∂U_r граница кругов достаточно малого радиуса r с центрами z_1, z_2. Следовательно, поскольку $f_k' \to f'$ и $f_k'/f_k \to f'/f$ на ∂U_r, то

$$\frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\partial U_r} \frac{f_n'(t)dt}{f_n(t)} \geqslant 2,$$

при больших n, а следовательно f_n не однолистна. Противоречие.

Метрика на $C(U)$.

Последовательность вложенных друг в друга компактов $K_i \subset U, K_i \subset K_{i+1}$ называется исчерпывающей, если любой подкомпакт вложен в компакт из этой последовательности с достаточно большим номером. Исчерпывающая последовательность существует: упорядочим как-то замкнутые шары с рациональными центрами и положительными рациональными радиусами, лежащими в U. Компакт K_i есть объединение первых i шаров (докажите, что эта последовательность в самом деле исчерпывающая). Зафиксируем какую-то исчерпывающую последовательность компактов.

Для непрерывной функции f положим $s_i(f) = \max_{z \in K_i} |f(z)|$ и определим $d(f) = \sum\limits_{k \in \mathbb{N}} (1/2^k) \min(s_k(f), 1)$. Положим $\rho(f, g) = d(f - g)$. Тогда ρ является метрикой. Неравенство треугольника для ρ следует из неравенства

$$d(f + g) \leqslant d(f) + d(g),$$

которое в свою очередь вытекает из $s_i(f+g) \leqslant s_i(f)+s_i(g)$. Сходимость в таким образом метризованном пространстве непрерывных функций эквивалентна равномерной сходмости на компактах (докажите]).

Ограниченность.

Множество функций называется ограниченным, если модуль ограничения на произвольный компакт $K \subset U$ ограничен константой $M(K)$ ($A \subset U$ ограничено, если для любого компакта $K \subset U$ есть такое число $M(K) \in \mathbb{R}_+$, что $|f(z)| < M(K)$ при любых $f \in A$ и $z \in K$). При этом функции из A могут и не быть ограниченными (A открыто). Отметим, что эта ограниченность вовсе не совпадает с ограниченностью в метрике ρ, в этой метрике все множества ограничены.

Оказывается, для подмножеств пространства голоморфных функций компактность равносильна ограниченности и замкнутости. Сейчас мы это докажем. Если подмножество в пространстве непрерывных функций компактно, то оно, очевидно, замкнуто. Образ компакта при отображении $f \mapsto \sup_{z \in K} |f(z)|$ компакт в $\mathbb{R}$ — следовательно компакт ограничен. Для справедливости обратного утверждения существенна голоморфность, а для подмножеств непрерывных функций компактность вообще говоря (приведите пример) не вытекает из ограниченности и замкнутости. Итак, докажем, что если подмножество пространства $H(U)$ ограничено и замкнуто, то оно компактно.

Мы будем доказывать, что из любой последовательности в ограниченном и замкнутом множестве голоморфных функций можно выбрать сходящуюся подпоследовательность.

Сходимость в круге

Покажем, для начала, что для последовательности голоморфных функций в открытом круге из ограниченного множества сходимость (равномерно на любом компакте в этом круге) эквивалентна сходимости каждой производной в центре этого круга. В одну сторону мы это уже доказали – из равномерной сходимости на любом компакте голоморфных функций вытекает и равномерная сходимость на любом компакте их производных. Значит в центре круга сходится последовательность любой производной. Остается показать обратное утверждение.

Достаточно рассмотреть случай круга с центром в нуле. Пусть

$$f_k(z) = \sum a_{n,k} z^n$$

тейлоровские разложения этих функций. Напомним, что $|a_n| \leqslant \frac{M(r)}{r^n}$, где $M(r)$ верхняя грань модуля функции $\sum a_n z^n$ на окружности радиуса r. Поскольку функции последовательности были из ограниченного множества, то найдется такая константа C, что

$$|f_k(z)| \leqslant C$$

при всех k и $|z| < r_0$. Следовательно, внутри круга с центром в нуле и радиуса r меньше r_0 справедлива оценка

$$|f_m(z) - f_n(z)| \leqslant \sum_{i=0}^{p} |a_{i,m} - a_{i,n}| r^i + 2C \sum_{i=p+1}^{\infty} (r/r_0)^i.$$

Эти две величины (суммы) можно сделать меньше ε выбрав сначала p достаточно большим, а потом m, n достаточно большим. Следовательно f_k равномерно сходится на каждом замкнутом круге (радиуса r), лежащем в исходном открытом круге.

Завершение доказательства компактности.

Пусть f_n ограниченная последовательность голоморфных на U функций. Выберем счетное множество открытых кругов с центрами z_i так, что их объединение есть U. Каждой точке z_i и числу $n \in \mathbb{Z}_+$ сопоставим отображение, переводящее функцию f в число $f^{(n)}(z_i)$. Этих отображений счетное число, пронумеруем их натуральными числами: $\alpha_1, \alpha_2, \ldots$. Выберем бесконечное подмножество $A_1 \subset \mathbb{N}$ по которому сойдется α_1, выберем потом бесконечное подмножество $A_2 \subset A_1$ по которому сойдется α_2, итд. Пусть теперь i-й номер подпоследовательности есть i-й элемент множества A_i. Так мы построили подпоследовательность, которая сходится (проверьте).

Доказательство теоремы Римана

Рассмотрим связную односвязную область $U \subset \mathbb{C}$, отличную от всей прямой. Параллельным переносом переведем ее в область, не содержащую ноль. В получившейся области есть однозначная непрерывная ветвь логарифма. Взяв любую такую ветвь ln и зафиксировав ее применим ее к области получим не всюду плотное множество (если образ содержит точку a, то он не содержит точек $a+2\pi ik, k \neq 0$ и их окрестностей). Значит, любая функция $\frac{1}{\ln(z+b)-a+2\pi ik}$ (с подходящим образом подобранными b и a) голоморфно и однозначно переведет U в ограниченное множество, обратное отображение тоже голоморфно.

Поэтому будем считать, что наше множество U ограничено, содержится в единичном круге и содержит ноль. Рассмотрим множество A голоморфных функций f на U, переводящих ноль в ноль ($f(0) = 0$) и U в подмножество единичного диска D (то есть $|f(z)| < 1$ при всех $z \in U$) и однолистных на U, а также удовлетворяющих условию $|f'(0)| \geq 1$.

Это множество, во-первых, ограничено, так как $|f(z)| < 1$ при всех $z \in U$. Во-вторых, оно непусто – в нем есть функция z. В-третьих, оно замкнуто – действительно, предел (последовательности функций) f удовлетворяет $f(0) = 0$ и однолистен потому что в нуле у предела производная ненулевая, так как ее модуль не меньше единицы. Модуль предельной функции не принимает значения 1, потому что он был бы в этом случае постоянен на U, а $f(0) = 0$.

Таким образом наше множество A функций компактно. Функция $f \to |f'(0)|$ непрерывна на нем (почему?), поэтому есть функция с максимальным значением модуля прозводной. Покажем, что эта функция биголоморфно переводит U в единичный диск D.

Пусть образ области U под действием $f \in A$ ($f(0) = 0$) не содержит точку $a \in D$. Нам надо показать, что можно найти такую функцию $f_1 \in A$, что $|f_1'(0)| > |f(0)|$. Это делается явной констукцией, которую м сейчас опишем. Можно считать (без ограничения общности), что a вещественное положительное число. Рассмотрим функцию

$$\frac{f(z) - a}{1 - af(z)}$$

которая является композицией $g_a \circ f$ функции f и автоморфизма g_a круга D, переводящего a в ноль. Она переводит U биголоморфно в подобласть единичного диска, не содержащую нуля. Поскольку эта подобласть односвязна (как и U), то на ней есть однозначная непрерывная ветвь логарифма (возьмем любую), так что образ $l = \ln \circ g_a \circ f$ лежит в левой

полуплоскости. Функция $F(z) = \frac{l(z)-l(0)}{l(z)+\overline{l(0)}}$ по прежнему голоморфна, однолистна и переводит 0 в 0 (почему?). Кроме этого, она переведет U в подмножество D.

Отношение модулей производных в нуле $|F'(0)|/|g'(0)|$ можно вычислить (сделайте это), оно равно

$$\frac{1-a^2}{2a\ln(1/a)}.$$

Остается показать, что это число больше 1 при $a \in]0,1[$. Это равносильно тому, что

$$\frac{1-a^2}{a} + 2\ln a$$

положительно на интервале $]0,1[$. Продифференцируем и получим $-\frac{1}{a^2} + 2\frac{1}{a} - 1 = -(\frac{1}{a}-1)^2$, это отрицательно на интервале $]0,1[$. Следовательно, $\frac{1-a^2}{a} + 2\ln a$ убывает на интервале до значения в единице, которое равно нулю. Поэтому на всем интервале величина положительна. Это заканчивает доказательство теоремы.