Лекция 18

1. Оператор Лапласа – Бельтрами и операция Ходжа.
2. Обобщение оператора Лапласа на дифференциальные формы
3. Оператор Лапласа в векторных расслоениях
4. Первая вариация функционала объёма, минимальные подмногообразия
5. Гармонические функции и минимальные подмногообразия $\mathbb{R}^n$
6. Теорема Такахаси: собственные функции оператора Лапласа-Бельтрами и минимальные подмногообразия сфер
7. Функционал энергии. Гармонические отображения.

① $\int\limits_M u\Delta v\, dVol = \int\limits_M (du, dv)\, dVol =$

$(du, dv) = \nabla u \cdot \nabla v$

$= \int\limits_M (u, d^* dv)\, dVol = \int\limits_M u d^* d v\, dVol$

$\Delta v = d^* d v = (d^* d + d d^*) v = (d + d^*)^2 v$

т.к. $\forall v \in C^\infty \quad d^* v = 0$

② Оператор Лапласа на формах (лапласиан Ходжа)

$\omega \in \Omega^k(M)$

$\Delta \omega = (d + d^*)^2 \omega = (dd^* + d^* d)\omega$

<u>Опр</u> Форма ω гармоническая, если $\Delta\omega = 0$.

Теория Ходжа: в каждом классе когомологий де Рама есть ровно одна гармоническая форма (гармонический представитель), т.е.

$$H^k_{dR}(M) \cong \mathcal{H}^k(M)$$

$\mathcal{H}^k(M)$ — пространство гармонических k-форм на M

<u>Уорнер</u>, Основы теории гладких многообразий и групп Ли

---

(3) оператор <u>Лапласа в векторных расслоениях</u>

$f \in C^\infty(M)$

$$\Delta f = \sum_i \left(-e_i(e_i f) + (\nabla^{TM}_{e_i} e_i) f\right)$$

e_i о/н базис в вект. полях на M

$E \to M$ векторное расслоение с ∇^E

$s \in \Gamma(E)$ $\quad \Delta^E s \in \Gamma(E)$

$$\Delta^E s = \sum_i \nabla^E_{\nabla^{TM}_{e_i} e_i} s - \nabla^E_{e_i}\left(\nabla^E_{e_i} s\right)$$

квадратичная форма

$$X, Y \longmapsto \left(\nabla^{T^*M \otimes E}_X \big(\underbrace{\nabla^E s}_{\Omega^1(M,E) = \Gamma(T^*M \otimes E)}\big)\right)(Y) \in \Gamma(E) =$$

векторные поля на M

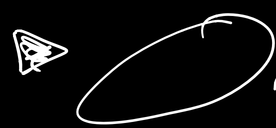
$$= \nabla^E_{\nabla^{TM}_X Y} s - \nabla^E_X\left(\nabla^E_Y s\right)$$

Утв $t, s \in \Gamma(E)$ $\qquad E$ $\langle\, , \rangle$ согласовано с ∇^E

$$\Rightarrow \int_M (t, \Delta^E s)\, dVol = \int_M (\nabla^E t, \nabla^E s)\, dVol =$$

произв в $T^*M \otimes E$

$$= \int_M \big(t, \underbrace{(\nabla^E)^* \nabla^E s}_{\text{лапласиан Бохнера}}\big)\, dVol$$



U $\quad e_1, .., e_n$ о/н базис в векторных полях на U

Рассмотрим такое t, что $\operatorname{supp} t \subset U$

$$\nabla^E s = e^i \otimes \nabla^E_{e_i} s \qquad (e^i, e^j) = \delta^{ij}$$

$$\nabla^E t = e^j \otimes \nabla^E_{e_j} t$$

$$\Rightarrow (\nabla^E t, \nabla^E s) = \sum_i (\nabla^E_{e_i} t, \nabla^E_{e_i} s)$$

произв в E

Нам достаточно д-ть, что

$$(\nabla^E t, \nabla^E s) - (t, \Delta^E s) = d^* \theta$$

т.к.

$$\int_M d^*\theta\, dVol = \int_M (1, d^*\theta)\, dVol =$$

$$= \int_M (\underbrace{d1}_{0}, \theta)\, dVol = 0$$

$$\sum_i (\nabla^E_{e_i} t, \nabla^E_{e_i} s) + (t, \nabla^E_{e_i}(\nabla^E_{e_i} s) - \nabla^E_{\nabla^{TM}_{e_i} e_i} s) = d^*\theta$$

$$\theta(X) = (t, \nabla^E_X s)$$

$\uparrow$
1-форма

Вычислить $d^*\theta = -*d*\theta = \dots$ упр. e^*

Коварный вопрос: $E = \Lambda^k T^*M$

$$\Delta = dd^* + d^*d \overset{?}{=} \Delta^{\Lambda^k T^*M}$$

Для $E = \Lambda^k T^*M$ совпадают ли два определения лапласиана?

Ответ: <u>нет</u>, формула Вейценбёка

(Jost, Riemannian geometry and Geometric Analysis)

Weitzenböck formula

④ Первая вариация функционала объёма и минимальные подмногообразия

$M \overset{f_0}{\hookrightarrow} \overline{M}$ погружение

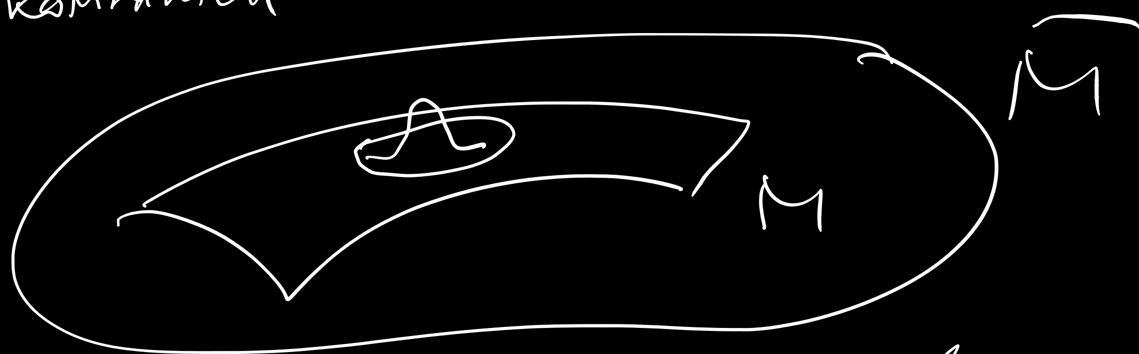
$f_0^* g \qquad g$

$$dVol_0 = dVol_{f_0^* g}$$

$$Vol[f_0] = \int_M dVol_0$$ объем M относительно погружения f_0

$$f_0 \mapsto Vol[f_0]$$

Опр f_t - вариация f_0 с компактным носителем, если $\mathrm{supp} f_t = \overline{\{x \mid f_t(x) \neq f_0(x)\}}$ компактен

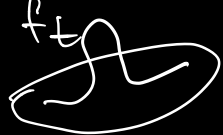


$M \overset{f_t}{\hookrightarrow} \overline{M}$, $f_t^* g \qquad g$

$$dVol_t = dVol_{f_t^* g}$$

Опр Погружение во минимально, если для любой вариации с компактным носителем

$$\frac{d}{dt}\int_M dVol_t \Big|_{t=0} = 0$$



$U \subset M$

$e_1, .., e_n$ о/н базис отн $f_0^* g = g_0$

$$g_t = f_t^* g$$

$$g_t = g_{ij}(t)\, e^i \otimes e^j \qquad g_{ij}(0) = \delta_{ij}$$

$dVol_t = \sqrt{g(t)}\, e^1 \wedge \ldots \wedge e^n$, где $g(t) = \det g_{ij}(t)$

$$\frac{d}{dt}\int_M dVol_t \Big|_{t=0} = \int_M \frac{d}{dt}\left(\sqrt{g(t)}\right) e^1 \wedge \ldots \wedge e^n \Big|_{t=0}$$

$$\frac{d}{dt}\sqrt{g(t)}\Big|_{t=0} = \frac{g'(t)}{2\sqrt{g(t)}}\Big|_{t=0} = \frac{1}{2} g'(0) \ominus$$

Утв $(\det A(t))'\big|_{t=0} = \operatorname{tr} A'(0)$

если $A(0) = E$

$$= \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n} g'_{kk}(0) =$$

$\frac{\partial}{\partial t}, e_1, \ldots, e_n$ базис в $(-\varepsilon, \varepsilon)\times \mathcal{U}$

$F: (-\varepsilon,\varepsilon)\times \mathcal{U} \to \bar{M}$

$F(x,t) = f_t(x)$

dF отправляет $\frac{\partial}{\partial t}, e_1, \ldots, e_n$ в

$V(t), e_1(t), \ldots, e_n(t)$

$e_i(0) = e_i$ $\qquad V(0) = \frac{\partial f_t}{\partial t}\Big|_{t=0}$

поле вариации

$$= \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n} V(t)\langle e_k(t), e_k(t)\rangle\Big|_{t=0} =$$

$$= \sum_{k=1}^{n} \langle \underbrace{\bar{\nabla}_{V(t)}}_{} e_k(t), e_k(t)\rangle\Big|_{t=0} =$$

∇ в $\bar{M}$

$\left[\frac{\partial}{\partial t}, e_i\right] = 0$ в $(-\varepsilon, \varepsilon) \times \mathcal{U}$

$\Rightarrow [V(t), e_i(t)]$ в $\bar{M}$

$$\bar\nabla_{V(t)} e_i(t) - \bar\nabla_{e_i} V(t) = [V(t), e_i(t)] = 0$$

$$= \sum_{k=1}^{n} \langle \bar\nabla_{e_k(t)} V(t), e_k(t) \rangle \Big|_{t=0} =$$

$$= \sum_{k=1}^{n} e_k(t) \langle V(t), e_k(t) \rangle - \langle V(t), \bar\nabla_{e_k(t)} e_k(t) \rangle \Big|_{t=0} =$$

$$= \sum_{k=1}^{n} e_k \langle V, e_k \rangle - \langle V, \bar\nabla_{e_k} e_k \rangle =$$

$$= \sum_{k=1}^{n} e_k \langle P(V), e_k \rangle - \underbrace{\langle V, \bar\nabla_{e_k} e_k \rangle}_{\langle P(V), \bar\nabla_{e_k} e_k \rangle} -$$

P — орт. проектор на $TM \subset T\bar{M}$

$$- \langle V, B(e_k, e_k) \rangle =$$

$$= \operatorname{div}(P(V)) - \langle V, H \rangle,$$

где $H = B(e_1, e_1) + \dots + B(e_n, e_n)$ — вектор средней кривизны

Т.е.

$$\frac{d}{dt}\int_M dVol_t\Big|_{t=0} = -\int_M \langle V, \mathfrak{h}\rangle\, dVol_0$$

это ноль $\forall$ вариации ($\exists \forall V$) $\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \mathfrak{h} = 0$

<u>Теорема</u> M минимально (погружено) в $\bar{M} \Leftrightarrow \mathfrak{h} = 0$

$$\mathfrak{h}^{M \hookrightarrow \bar{M}}$$

---

(5) Гармонические функции и минимальные подмногообразия $\mathbb{R}^n$

$M \hookrightarrow \mathbb{R}^n$ $\qquad a \in \mathbb{R}^n$ постоянный вектор

$f(x) = \langle x, a\rangle$

линейная ф-ция $\qquad \dim M = m$

$e_1, .., e_m$ лок. о/н базис в в. полях на M

$\varepsilon_1, .., \varepsilon_n$ стандартный базис в $\mathbb{R}^n$

$x^i = \langle x, \varepsilon_i\rangle$

$f|_M$

$\operatorname{grad}^M f = P(a)$

оператор Лапласа на M с индуцированной из $\mathbb{R}^n$ метрикой

$$\Delta^M f = -\operatorname{div}^M \operatorname{grad}^M f =$$

$$= -\operatorname{div}^M P(a) = -\sum_i \langle \nabla^M_{e_i} P(a), e_i \rangle =$$

$$= \sum_i \left(-e_i \langle P(a), e_i \rangle + \langle P(a), \nabla^M_{e_i} e_i \rangle \right) =$$

$$= \sum_i \left(-e_i \langle a, e_i \rangle + \langle a, \nabla^M_{e_i} e_i \rangle \right) =$$

$$= \sum_i \left(-\langle a, \partial_{e_i} e_i \rangle + \langle a, \nabla^M_{e_i} e_i \rangle \right) =$$

$$= -\sum_i \langle a, B(e_i, e_i) \rangle = -\langle b, a \rangle$$

<u>Утв</u> Если $M \hookrightarrow \mathbb{R}^n$ и $f(x) = \langle x, a \rangle$, то $\Delta^M f = -\langle b, a \rangle$

<u>Следствие</u> $M \hookrightarrow \mathbb{R}^n$ минимально

$$\Updownarrow$$

$$\forall i \quad \Delta^M x^i = 0$$

⑥ Теорема Такахаси

$$M \hookrightarrow S^{n-1}_R \subset \mathbb{R}^n$$

$$\partial_X Y = \nabla^{S^{n-1}_R}_X Y + B^{S^{n-1}_R \subset \mathbb{R}^n}(X,Y) \qquad (1)$$

$$\nabla^{S^{n-1}_R}_X Y = \nabla^M_X Y + B^{M \hookrightarrow S^{n-1}_R}(X,Y) \qquad (2)$$

$$\partial_X Y = \nabla^M_X Y + B^{M \hookrightarrow \mathbb{R}^n}(X,Y) \qquad (3)$$

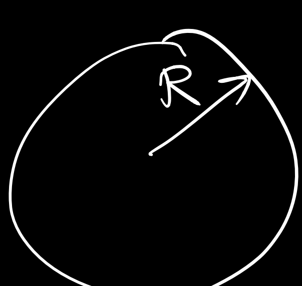
$(3)-(2)+(1)$

$$B^{M \hookrightarrow \mathbb{R}^n}(X,Y) = B^{M \hookrightarrow S^{n-1}_R}(X,Y) + B^{S^{n-1}_R \subset \mathbb{R}^n}(X,Y)$$

$$f(x) = \langle x, a \rangle$$

$$\Delta^M f = -\sum_i \langle B^{M \subset \mathbb{R}^n}(e_i,e_i), a \rangle =$$

$$= -\sum_i \langle B^{M \hookrightarrow S^{n-1}_R}(e_i,e_i), a \rangle - \sum_i \langle B^{S^{n-1}_R \subset \mathbb{R}^n}(e_i,e_i), a \rangle$$



$S^1_R \qquad r(\varphi) = (R\cos\varphi, R\sin\varphi)$

$$\frac{\partial r}{\partial \varphi} = (-R\sin\varphi, R\cos\varphi)$$

$$e_1 = \frac{1}{R}\frac{\partial r}{\partial \varphi}$$

$$B^{S^1_R \subset \mathbb{R}^2}(e_1,e_1) = (\mathrm{Id}-P)(\partial_{e_1} e_1) = (\mathrm{Id}-P)\left(\frac{\partial}{r\partial\varphi}\frac{1}{R}\frac{\partial}{\partial\varphi}\right) =$$

$$= \frac{1}{R^2}(\mathrm{Id}-P)\left(\frac{\partial^2 r}{\partial\varphi^2}\right) = \frac{1}{R^2}(\mathrm{Id}-P)(-R\cos\varphi, -R\sin\varphi) =$$

$$= -\frac{r}{R^2}$$

поэтому

$$M \hookrightarrow S^{n-1}_R$$

$$\Delta^M f = -\langle \xi, a\rangle + \frac{m}{R^2}\langle x, a\rangle$$

<u>Теорема Такахаси</u> 1) Пусть M минимально (погружено) в S^{n-1}_R, тогда $\forall i\ \Delta^M x^i = \lambda x^i$, где $\lambda = \frac{m}{R^2}$

2) пусть M погружено в $\mathbb{R}^n$ и $\forall i\ \Delta^M x^i = \overset{\neq 0}{\lambda} x^i$. Тогда $M \hookrightarrow S^{n-1}_R$, где $R = \sqrt{\frac{m}{\lambda}}$ и это погружение минимально.

$\Rightarrow$ Осталось д-ть только то, что M лежит на сфере

$\forall i\ \Delta^M x^i = \lambda x^i$

$\Rightarrow \forall a \quad \Delta^M\langle x, a\rangle = \lambda\langle x, a\rangle$

$$\Rightarrow -\langle \mathfrak{h}, a\rangle = \lambda \langle x, a\rangle$$

$$\Rightarrow x = -\frac{1}{\lambda}\mathfrak{h}$$

$$\partial_{e_i} x = e_i \quad \left(\lim_{t\to 0} \frac{x + te_i - x}{t} = e_i\right)$$

$$\Rightarrow e_i = -\frac{1}{\lambda}\partial_{e_i}\mathfrak{h}$$

$m = \dim M$

$$m = \underbrace{1 + \ldots + 1}_{m} = \langle e_1, e_1\rangle + \ldots + \langle e_m, e_m\rangle =$$

$$= \sum_i \langle e_i, e_i\rangle = -\sum_i \langle e_i, \frac{1}{\lambda}\partial_{e_i}\mathfrak{h}\rangle =$$

$$= -\frac{1}{\lambda}\sum_i \langle e_i, \partial_{e_i}\mathfrak{h}\rangle =$$

$$= +\frac{1}{\lambda}\sum_i \langle e_i, W_{\mathfrak{h}} e_i\rangle =$$

$$= \frac{1}{\lambda}\sum_i \langle \mathfrak{h}, B(e_i, e_i)\rangle = \frac{1}{\lambda}|\mathfrak{h}|^2$$

$$\Rightarrow |\mathfrak{h}|^2 = m\lambda = \text{const} \Rightarrow \lambda > 0$$

$$\text{u } |x| = \frac{1}{\lambda}|\mathfrak{h}| = \frac{1}{\lambda}\sqrt{m\lambda} = \underbrace{\sqrt{\frac{m}{\lambda}}}_{= R}$$

(7) Функционал энергии, гармонические отображения.

кривые $L[\gamma] = \int_a^b \sqrt{(\dot\gamma, \dot\gamma)}\, dt$

$$E[\gamma] = \int_a^b (\dot\gamma, \dot\gamma)\, dt$$

$M \xrightarrow{f} N_g \quad \mathrm{Vol}[f] = \int_M d\mathrm{Vol}_{f^* g}$

$$M \xrightarrow{f} N \qquad E[f] = \int_M |df|^2\, d\mathrm{Vol}$$

$\gamma \qquad g$

$x^1, .., x^m \qquad y^1, .., y^2 \qquad y^1 = f^1(x^1 .. x^m)$

$\gamma_{\alpha\beta} \qquad g_{ij} \qquad y^n = f^n(x^1, .., x^n)$

$$df = \frac{\partial f^i}{\partial x^\alpha} dx^\alpha \otimes \frac{\partial}{\partial y^i} \in \Gamma(T^*M \otimes f^*TN)$$

$$|df|^2 = \langle df, df \rangle_{T^*M \otimes f^*TN}$$

$$|df|^2 = \gamma^{\alpha\beta}(x)\, g_{ij}(f(x)) \frac{\partial f^i}{\partial x^\alpha} \frac{\partial f^j}{\partial x^\beta}$$

Опр отображение $f: M \to N$ гармоническое, если $\forall$ вариации f_t с компактным носителем

$$\frac{d}{dt} \int_M |df|^2 \, dVol \Big|_{t=0} = 0$$

Утв уравнение экстремалей имеет вид

$$-\Delta^M f^i + \gamma^{\alpha\beta}(x)\, \Gamma^i_{jk}(f(x)) \frac{\partial f^j}{\partial x^\alpha} \frac{\partial f^k}{\partial x^\beta} = 0$$

$M = \mathbb{R}$ уравнение геодезических

$N = \mathbb{R}$ гармонические функции

Jost, Riemannian Geometry and Geometric Analysis

Новиков, Тайманов, Современные

Изометрические группы поле