НМУ, 2 курс, дифференциальная геометрия. Листок 10. Геодезические. 12.05.2020.

Задача 1. Построить пример такого связного риманова многообразия M и точки $A \in M$, что экспоненциальное отображение $\exp_A : T_A M \longrightarrow M$ не является

- сюръективным,
- инъективным.

Задача 2*. Интегрируя уравнение геодезических, найти все геодезические на плоскости Лобачевского *как непараметризованные кривые.* Можно взять любую из моделей плоскости Лобаческого, например верхнюю полуплоскость с метрикой $\dfrac{dx^2+dy^2}{y^2}$. *Указание. Очевидно, что* $I_1 = \dfrac{\dot{x}^2+\dot{y}^2}{y^2}$ *является первым интегралом, так как параметр на геодезической является аффинным натуральным параметром. Найдите второй первый интеграл и с его помощью найдите* $y(x)$.

Задача 3. Докажите, что геодезическая $\exp_p(tv)$ и геодезическая сфера $\exp_p(S_\delta)$, где $S_\delta = \{v \in T_pM | |v| = \delta\}$, всегда ортогональны друг другу.

Задача 4. Докажите, что в геодезических координатах, центрированных в точке p, символы Кристоффеля в точке p обращаются в ноль (в других точках, в общем-то, это неверно).

Докажите, что центрированные в точке p координаты $x^1, \dots, x^n$, определённые в окрестности U, являются геодезическими координатами, центрированными в точке p, тогда и только тогда, когда $\Gamma^i_{jk}x^jx^k \equiv 0$ тождественно по $x^1, \dots, x^n$ в U. *Указание. Обратите внимание на то, что в геодезических координатах, центрированных в точке* p, *геодезические, проходящие через точку* p, *имеют вид* $x^i = a^i t$.

Задача 5. Докажите, что в полугеодезических координатах $x^1, \dots, x^n$, то есть в таких координатах, в которых метрика имеет вид

$$\sum_{1 \leqslant i,j \leqslant n-1} g_{ij}dx^idx^j + (dx^n)^2,$$

кривые $x^1 = \mathrm{const}, \dots, x^{n-1} = \mathrm{const}$ являются геодезическими с параметром $t = x^n$.

Задача 6. Докажите, что геодезические в $\mathbb{R}^n$ (с евклидовой метрикой) не имеют сопряженных точек.

Задача 7. Найдите явно якобиевы поля вдоль геодезических на сфере $\mathbb{S}^n$ со стандартной метрикой в подходящем базисе векторных полей.

Задача 8. Докажите, что северный и южный полюс сферы $\mathbb{S}^n$ являются сопряжёнными точками вдоль дуги большого круга кратности $n-1$.

Задача 9. Докажите, что на многообразии отрицательной секционной кривизны геодезические не содержат сопряжённых точек.

Задача 10. Как широко известно, касательное расслоение TG к группе Ли G тривиально. Например, это следует из того, что если выбрать базис $e_1, \dots, e_n$ в алгебре Ли $\mathfrak{g}$, то соответствующие левоинвариантные поля $\tilde{e}_1, \dots, \tilde{e}_n$ образуют базис в глобальных сечениях касательного расслоения TG. С другой стороны, мы обсуждали, что в тривиальном расслоении можно ввести связность $\nabla = d$.

Выберем некоторый базис $e_1, \dots, e_n$ в алгебре Ли $\mathfrak{g}$, а значит, как описано выше, тривиализацию $TG \cong G \times \mathfrak{g}$ и связность $\nabla = d$ в TG.

a) Найти явную формулу для этой связности в базисе сечений $\tilde{e}_i$, то есть найти ∇X, если $X = a^i \tilde{e}_i$, где a^i — функции на G.

b) Доказать, что связность ∇ не зависит от выбора базиса $e_1, \dots, e_n$ в $\mathfrak{g}$. Эта связность называется *левоинвариантной связностью на группе Ли* G

c) Доказать, что левоинвариантная связность согласована с любой левоинвариантной метрикой на группе Ли G, но является симметричной связностью тогда и только тогда, когда группа G абелева. Таким образом, вообще говоря, левоинвариантная связность на группе Ли не является связностью Леви-Чивита.

d) Доказать, что для любого левоинвариантного векторного поля X имеет место равенство $\nabla_X X = 0$, а значит любая интегральная кривая левоинвариантного поля X является геодезической.

e) Пусть $\xi \in \mathfrak{g}$, а $X = \tilde{\xi}$ соответствующее левоинвариантное векторное поле. Доказать, что геодезическая $\gamma(t)$, являющаяся интегральной кривой этого векторного поля, удовлетворяет дифференциальному уравнению
$$\dot{\gamma}(t) = d_e L_{\gamma(t)} \xi, \tag{1}$$
где
$$L_{\gamma(t)} : G \longrightarrow G$$
левый сдвиг на элемент $\gamma(t)$ на группе Ли G, а
$$d_e L_{\gamma(t)} : \mathfrak{g} \longrightarrow T_{\gamma(t)} G$$
его дифференциал в единице $e \in G$.

f) Доказать, что геодезическая $\gamma(t)$, выходящая при $t = 0$ из единицы группы $e \in G$ с начальным вектором скорости $\xi \in \mathfrak{g}$ является решением задачи Коши для уравнения (1) с начальным условием $\gamma(0) = e$.

g) Доказать, что геодезическая $\gamma(t)$ из пункта f) удовлетворяет соотношению
$$\gamma(s + t) = \gamma(s)\gamma(t), \tag{2}$$
для всех s и t, при которых определена правая и левая часть. В правой части (2) используется умножение в группе Ли G.

Указание: записать (2) *в виде* $\gamma(s + t) = L_{\gamma(s)}\gamma(t)$, *продифференцировать по* t *и подставить* $t = 0$.

h) Доказать, что геодезическая $\gamma(t)$ из пункта f) продолжается на всю числовую ось,
$$\gamma : \mathbb{R} \longrightarrow G,$$
и в дополнение к (2) удовлетворяет ещё и соотношениям
$$\gamma(0) = e, \quad \gamma(-t) = [\gamma(t)]^{-1}.$$

Такой путь γ в группе Ли называются *однопараметрической подгруппой группы Ли.*

i) Доказать, что для матричной группы Ли $G \subset \mathrm{GL}(n)$ уравнение (1) имеет вид

$$\dot{\gamma}(t) = \gamma(t)\xi$$

и его решением, проходящим при $t = 0$ через единицу группы, является $\gamma(t) = e^{t\xi}$, где $e^{\xi} = E + t\xi + \frac{t^2}{2!}\xi^2 + \dots$ обычная экспонента от матрицы. Таким образом, геодезической $\gamma_{e,\xi}(t)$ левоинвариантной связности, проходящей при $t = 0$ через единицу e матричной группы с начальным вектором $\xi \in \mathfrak{g}$, является $\gamma_{e,\xi}(t) = e^{t\xi}$.

j) Доказать, что для матричной группы Ли $G \subset \mathrm{GL}(n)$ экспоненциальное отображение в единице $\exp_e$ совпадает с матричной экспонентой,

$$\exp_e(\xi) = e^{\xi}.$$

Этот факт и является мотивацией для использования термина «экспоненциальное отображение» в римановой геометрии.

k) Определить по аналогии с левоинвариантной связностью правоинвариантную. Найти её геодезические, проходящие через единицу группы. Как будет устроено соответствующее экспоненциальное отображение в единице группы?

l) Допустим, что на группе Ли G существует метрика Картана-Киллинга. Найти геодезические, определённые с помощью её связности Леви-Чивита, проходящие через единицу группы. Как будет устроено соответствующее экспоненциальное отображение в единице группы?