12 Квазирегулярные (перестановочные) представления

Определение 12.1. *Пусть X — множество, на котором группа G действует слева. Рассмотрим пространство $\Bbbk X$, базисом которого является множество X. Определим представление λ_X группы G в пространстве $\Bbbk X$ формулой*

$$\lambda_X(g)\sum a_x x = \sum a_x gx.$$

Такое представление называется *<u>квазирегулярным</u>*.

Ясно, что представление λ_X распадается в сумму подпредставлений, отвечающих разным орбитам действия группы G на X.

Теорема 12.2. *Пусть группа G действует на множествах X и Y, причем на X это действие транзитивно. То есть $X = G/H$, где H – стабилизатор какой-то точки $x_0 \in X$. Тогда число сплетения $c(\lambda_X, \lambda_Y)$ равно числу H-орбит на множестве Y.*

В частности, если $Y = G/K$, то $c(\lambda_X, \lambda_Y)$ равно числу двойных смежных классов, то есть различных множеств вида HgK, где $g \in G$.

Доказательство. Пусть $\varphi : \Bbbk X \to \Bbbk Y$ — сплетающий оператор и пусть $\varphi(x_0) = \sum\limits_{y\in Y} b_y y$. Тогда для любого $h \in H$ мы имеем

$$\sum_{y\in Y} b_y y = \varphi(x_0) = \varphi(hx_0) = \lambda_Y(h)\varphi(x_0) = \sum_{y\in Y} b_y hy.$$

Отсюда мы получаем, что $b_y = b_{hy}$ для любых $h \in H$ и $y \in Y$, то есть коэффициенты b_y постоянны на H-орбитах во множестве Y. При этом набором коэффициентов b_y оператор φ определяется однозначно: $\varphi(gx_0) = \sum\limits_{y\in Y} b_y gy$.

Пусть теперь $f : Y \to \Bbbk$ — произвольная функция, постоянная на H-орбитах. Выберем для каждого $x \in X$ элемент $g_x \in G$ такой, что $x = g_x x_0$, и положим $\psi(x) = \sum\limits_{y\in Y} f(y) g_x y$. Из того, что функция f постоянна на H-орбитах, следует, что это определение корректно. Продолжим ψ по линейности до оператора $\Bbbk X \to \Bbbk Y$. Очевидно, что это сплетающий оператор. Поэтому $c(\lambda_X, \lambda_Y)$ равно числу H-орбит в Y.

Если же $Y \simeq G/K$ как множество с действием группы G, то смежные классы $g_1 K$ и $g_2 K$ лежат в одной H-орбите тогда и только тогда, когда $Hg_1K = Hg_2K$. Поэтому $c(\lambda_X, \lambda_Y) = \#(H\backslash G/K)$. □

Пример 12.3. *Рассматривая однородные пространства для группы S_4 – группы вращений куба, можно построить полную систему ее неприводимых представлений. Пусть*

- X_{f} — *множество граней куба;*
- X_{v} — *множество вершин куба;*
- X_{d} — *множество больших диагоналей куба;*
- X_{t} — *множество правильных тетраэдров с вершинами в вершинах куба;*
- X_{c} — *множество центров куба.*

Пространства функций на этих множествах мы обозначим через V_{f}, V_{v}, V_{d}, V_{t}, V_{c}. *Их размерности равны* 6, 8, 4, 2, 1 *соответственно. Числа сплетения между соответствующими квазирегулярными представлениями легко найти. Например,* $c(\lambda_{\mathrm{f}}, \lambda_{\mathrm{f}})$ *равно количеству орбит стабилизатора грани на множестве граней куба. Таких орбит* 3 *– сама грань, соседние грани, противоположная грань. Выпишем таблицу с данными числами спелетения.*

	λ_{f}	λ_{v}	λ_{d}	λ_{t}	λ
λ_{f}	*3*	*2*	*1*	*1*	*1*
λ_{v}	*2*	*4*	*2*	*2*	*1*
λ_{d}	*1*	*2*	*2*	*1*	*1*
λ_{t}	*1*	*2*	*1*	*2*	*1*
λ_{c}	*1*	*1*	*1*	*1*	*1*

Посмотрим, какие выводы можно сделать из этой таблицы. Прежде всего, из вида диагональных чисел следует, что λ_{c} *— неприводимое представление (это, впрочем, ясно уже из того, что пространство* V_{c} *одномерно),* λ_{d} *и* λ_{t} *являются суммами двух неизоморфных неприводимых представлений,* λ_{f} *— трех неизоморфных неприводимых представлений, а для* λ_{v} *есть две возможности — либо сумма двух изоморфных неприводимых представлений, либо сумма четырех неизоморфных неприводимых представлений. Первая из этих возможностей отпадает, так как в этом случае* $c(\lambda_{\mathrm{v}}, \lambda_{\mathrm{c}})$ *не могло бы равняться* 1.

Далее из таблицы следует, что λ_{c} *входит в остальные модули с кратностью* 1. *Мы уже видели, что* λ_{f} *является суммой своих подпредставлений* $\rho_1 \simeq \lambda_{\mathrm{c}}$, ρ_2 *и* ρ_3. *Продолжая эти рассуждения, легко получаем, что имеют место изоморфизмы*

$$\begin{aligned}
&\lambda_{\mathrm{f}} \simeq \rho_1 + \rho_2 + \rho_3,\\
&\lambda_{\mathrm{v}} \simeq \rho_1 + \rho_3 + \rho_4 + \rho_5,\\
&\lambda_{\mathrm{d}} \simeq \rho_1 + \rho_4,\\
&\lambda_{\mathrm{t}} \simeq \rho_1 + \rho_5,\\
&\lambda_{\mathrm{c}} \simeq \rho_1,
\end{aligned}$$

где ρ_1, ρ_2, ρ_3, ρ_4, ρ_5 *— попарно неизоморфные неприводимые представления группы* G *размерностей* 1, 2, 3, 3 *и* 1 *соответственно. Размерности представлений находятся из системы уравнений*

$$\dim \lambda_{\mathrm{f}} = \dim \rho_1 + \dim \rho_2 + \dim \rho_3, \tag{12.4}$$

$$\dim \lambda_{\mathrm{v}} = \dim \rho_1 + \dim \rho_3 + \dim \rho_4 + \dim \rho_5, \tag{12.5}$$

$$\dim \lambda_{\mathrm{d}} = \dim \rho_1 + \dim \rho_4, \tag{12.6}$$

$$\dim \lambda_{\mathrm{t}} = \dim \rho_1 + \dim \rho_5, \tag{12.7}$$

$$\dim \lambda_{\mathrm{c}} = \dim \rho_1. \tag{12.8}$$

Остается воспользоваться формулой о сумме квадратов представлений и заметить, что

$$1^2 + 2^2 + 3^2 + 3^2 + 1^2 = 24 = |S_4|$$

Тем самым мы перечислили все неприводимые представления группы S_4 *(с точностью до изоморфизма).*