Семинар 13. Представления конечных групп - 3. Характеры.

Задача 13.1.

(а) Пусть V – конечномерное представление группы G. Выразите характеры $V \otimes V$, V^*, $\mathrm{Hom}(V, W)$, S^2V и $\Lambda^2 V$ через характер V.

(б) $V \simeq V^*$ тогда и только тогда, когда $\chi_V(g)$ принимает только вещественные значения.

(в) Докажите, что все представления S_n самодвойственны.

(г) Докажите, что $(\chi_V, \chi_W) = (\chi_{V^* \otimes W}, \chi_{id})$ и $\dim \mathrm{Hom}_G(V, W) = \dim[V \otimes W^*]^G$. За id обозначено тривиальное одномерное представление, за $[U]^G$ обозначено пространство G-инвариантны векторов в G-представлении U;

(д) Пусть $\mathbb{C}_\xi$ – одномерное и V –неприводимое представления группы G. Покажите, что $V \otimes \mathbb{C}_\xi$ также неприводимое.

Задача 13.2.

(а) Постройте таблицу характеров групп D_4 и Q_8 и сравните их. (Верно ли, что групповые алгебры $\mathbb{C}D_4$ и $\mathbb{C}Q_8$ изоморфны?)

(б) Покажите, что разложение тензорного произведения неприводимых представлений на неприводимые одинаково для этих групп, а вот разложение симметрического и внешнего квадрата неприводимого двумерного представления разное.

Задача 13.3.

(а) Постройте таблицу характеров групп S_4 и A_4 (для S_4 можно использовать материалы лекций о квазирегулярных представлениях).

(б) Найдите разложение $\Lambda^k V$ для всех неприводимых представлений A_4 и S_4.

Задача 13.4. Пусть G действует на множестве X. Пусть χ – характер соответствующего квазирегулярного представления, χ_{id} – характер тривиального представления. Докажите, что

(а) $\chi(g)$ равен числу неподвижных точек под действием g;

(б) $(\chi, \chi_{id}) =$ (число орбит G на X).

(в) (χ, χ) равен числу G-орбит на $X \times X$.

(г) Пусть G действует на X дважды транзитиво. Покажите, что $(\chi, \chi) = 2$.

Задача 13.5.

(а) Дозаполните недостающие характеры в таблице характеров группы порядка 16.

$\#C$	ρ_1	ρ_2	ρ_3	ρ_4	ρ_5	ρ_6	ρ_7
	1	1	1	2			
	1	-1	1	$i\sqrt{2}$			
	1	1	1	0			
	1	1	1	-2			
	1	-1	1	$-i\sqrt{2}$			
	1	1	-1	0			
	1	-1	-1	0			

Свой ответ поясните! В частности, укажите размерности недостающих представлений и как раскладывается регулярное представление, характер которого вы знаете.

(б) Восстановите порядки классов сопряженности по таблице характеров посчитав скалярный квадрат строк таблицы.

Справка, которая не требуется для решения данной задачи:
Перед вами таблица характеров полудиэдральной группы SD_{16}, *которая может быть задана двумя образующими* a, b *и соотношениями:* $\langle a^8 = b^2 = e, bab = a^3 \rangle$. *Представители классов сопряженности выглядят так:* $\big(e,\ \ a,\ \ a^2,\ \ a^4,\ \ a^5,\ \ b,\ \ ab\big)$.

Задача 13.6*. Рассмотрим действие группы S_4 на алгебре плюккеровых координат:

$$P = \mathbb{C}[x_{ij}]/(x_{12}x_{34} - x_{13}x_{24} + x_{14}x_{23}), 1 \leqslant i < j \leqslant 4$$

по правилу $\sigma x_{ij} = x_{\sigma(i)\sigma(j)}$ (при этом $x_{ij} = -x_{ji}$). Разложите на неприводимые подпространство, порождённое квадратичными мономами от плюккеровых координат.