

Дополнительный семинар 14. Примеры индуцированных представлений

Группа $A_3 \times Q_8$: Обозначим за Q_8 группу кватернионов, состоящую из элементов $\{\pm 1, \pm i, \pm j, \pm k\}$. Циклическая перестановка $i \rightarrow j \rightarrow k \rightarrow i$ является внешним автоморфизмом группы Q_8 (проверьте это). Тем самым определено полупрямое произведение групп $A_3 \times Q_8$.

Задача 14.1.

(а) Покажите, что $I := \text{Ind}_{\{\pm 1, \pm i\}}^{Q_8} \chi$ является неприводимым двумерным представлением, если χ – одномерное представление с $\chi(-1) = -1$. Выберите базис в I и напишите матрицы действия элементов $\{i, j, k\}$ в этом базисе.

(б) Выпишите полный список неприводимых комплексных представлений группы Q_8 и действие группы A_3 на нём.

Задача 14.2. (а) Задайте группу $A_3 \times Q_8$ образующими и соотношениями.

(б) Вычислите коммутант этой группы и количество различных одномерных представлений.

(в) Докажите, что представление $\text{Ind}_{Q_8}^{A_3 \times Q_8} \chi$ является неприводимым, если χ – нетривиальное одномерное представление группы Q_8 . Выпишите действие образующих в этом представлении.

(г) Сколько неприводимых встречается в разложении $\text{Ind}_{Q_8}^{A_3 \times Q_8} V$ и каковы их размерности. Опишите данные представления явно, то есть в каждом из неприводимых подпредставлений выберите базис и выпишите матрицы действия образующих группы в этом базисе.

(д) Выпишите полный список неприводимых представлений группы $A_3 \times Q_8$.

Задача 14.3. Группа Гейзенберга $Heis_N$ порождается 3-мя образующими a, b, c и соотношениями $a^N = b^N = c^N = e$ и $ac = cb, bc = cb, ab = cba$.

(а) Воспользуйтесь двойственностью Фробениуса и покажите, что для произвольного делителя $d|N$ представление, индуцированное с одномерного представления подгруппы H , порожденной a^d, b, c неприводимо, коль скоро c действует в нем примитивным корнем d -ой степени из 1.

(б) Вычислите размерности всех неприводимых представлений группы Гейзенберга $Heis_N$ для произвольного N .