Семинар 1. Модули

Задача 1.1. **(а)** Постройте соответствие между модулями над кольцом гауссовых чисел $\mathbb{Z}[i]$ и следующими парами: абелева группа A и автоморфизм $\varphi \in Aut(A)$ такой что $\forall a \in A$ выполнено $\varphi(\varphi(a)) = a^{-1}$.

(б) Опишите все $\mathbb{Z}[i]$-модули из $\leqslant 5$ элементов с точностью до изоморфизма.

Задача 1.2. Постройте изоморфизмы между

(а) $Hom_{\mathbb{Z}}(\mathbb{Z}/(m\mathbb{Z}), \mathbb{Z}/(n\mathbb{Z}))$ и $\mathbb{Z}/(d\mathbb{Z})$, где $d := (m, n)$ – наибольший общий делитель чисел m и n;

(б) $Hom_{\Bbbk[x]}(\Bbbk[x]/(f(x)), \Bbbk[x]/(g(x)))$ и $\Bbbk[x]/(d(x))$, где $d(x) = (f(x), g(x))$.

(в) $Aut_{\mathbb{Z}}(\underbrace{\mathbb{Z}/(n\mathbb{Z}) \oplus \ldots \oplus \mathbb{Z}/(n\mathbb{Z})}_{d})$ и $GL_d(\mathbb{Z}/(n\mathbb{Z}))$ – множеством матриц порядка d, чей определитель принадлежит группе $\mathbb{Z}/(n\mathbb{Z})^*$, т.е. является остатком взаимнопростым с n.

Задача 1.3. Говорят, что последовательность отображений R-модулей

$$\ldots A_{i-1} \stackrel{d_{i-1}}{\to} A_i \stackrel{d_i}{\to} A_{i+1} \stackrel{d_{i+1}}{\to} \ldots$$

таких что $d_i \circ d_{i-1} = 0$ $\forall i$ точна, если $\ker(d_i) = Im(d_{i-1})$ для все i.

Докажите, что для любого R-модуля M и короткой точной последовательности R-модулей

$$0 \to A \xrightarrow{\varphi} B \xrightarrow{\psi} C \longrightarrow 0$$

соответствующие последовательности R-гомоморфизмов из M точна слева, то есть точна последовательность:

$$0 \to Hom_R(M, A) \to Hom_R(M, B) \to Hom_R(M, C)$$

и последовательность R-гомоморфизмов из M точна справа, то есть точна последовательность

$$Hom_R(A, M) \leftarrow Hom_R(B, M) \leftarrow Hom_R(C, M) \leftarrow 0$$

Приведите примеры $\mathbb{Z}$-модулей, показывающие, что с других концов точность не всегда имеет место быть.

Задача 1.4. (Нетеровы модули) Докажите, что следующие условия на R-модуль M эквивалентны:

(а) Любой подмодуль $N \subset M$ – конечнопорождён,

(б) Для любой возрастающей цепочки подмодулей $N_1 \subset N_2 \subset N_3 \subset \ldots$ найдется такое натуральное n, что $N_n = N_m$ $\forall m \geqslant n$.

Задача 1.5. Пусть $N \subset M$ пара вложенных R-модулей. Верно ли, что

(а) если подмодуль N и фактормодуль M/N конечнопорожденные, то M – конечнопорожденный;

(б) если M – конечнопорожденный, то N и M/N – конечнопорожденные;[1]

(в) если M – нетеров, то N и M/N тоже нетеровы;

(г) если N и M/N – нетеровы, то M – нетеров.

[1] Указание: рассмотрите кольцо $R = \Bbbk[x_1, x_2, \ldots]$ и $M = R$