Объявление: В кондуите имеется столбец в начале: ИТОГ — общее кол-во сданных задач.

Итоговая оценка складывается
из доли экзамена E%
доли сданных задач Z% (можно найти в кондуите)

отлично $(E+Z) \geq 140\%$
хорошо $(E+Z) \geq 100\%$
удовл $(E+Z) \geq 60\%$.

Экзамен 24.05 (Сообщите при желании)

Лекции: сегодня + 2, семинары + 3.

## Лекция 12 | Представления конечных групп.

Основные факты прошлого раза:

$G$ – конечная группа $\quad Reps_{\mathbb{K}}(G) = \mathbb{K}G$ – модули.

– умеем складывать пр-ия

$$V \oplus W \qquad \rho_{V\oplus W}(g) = \rho_V(g) + \rho_W(g)$$

– умеем брать тензорное пр-ие

$$V \otimes W \qquad \rho_{V\otimes W}(g) = \rho_V(g) \otimes \rho_W(g).$$

– более того корректно определены сим. и внешние степени пр-ий $V \rightsquigarrow S^k V,\ \Lambda^k V,\ \rho_{S_k}(g) = S^k\rho(g)$

---

Зам. Обозначаем пр-ие $V$ (вместо полож. $(V, \rho)$)

$$\rho: G \to End_{\mathbb{K}}(V).$$

Теор. Машке любой $\mathbb{K}G$-mod полупрост (если $(\mathrm{char}\,\mathbb{K}, \#G)=1$)

$\iff$ любое кон. $G$-представление раскладывается в прямую сумму неприводимых.

---

Поэтому основная задача классифицировать (описать) мн-во $\mathrm{Irrep}_{\mathbb{K}}(G)$ — неприводимых $G$-пр-ий $/\mathbb{K}$.

---

Другое док-во Т. Машке для $\mathbb{K}=\mathbb{C}$ ($\mathrm{char}\,\mathbb{K}=0$).

Для вект. пр-ва $V/\mathbb{C}$ $\exists$ полож. опред эрмитово форма

$(-,-): V\times V \longrightarrow \mathbb{C}$

$(x,y)=\overline{(y,x)}$, $(x,x)\in\mathbb{R}_{\geq 0}$ $(x,x)=0 \iff x=0$.

Пусть $(V,\rho)$ — пр-ие группы $G$. и $(\ ,\ )$ — полож. эрм. форма.

тогда $\exists$ инвар. полож. эрм. форма $(x,y)_G := \frac{1}{|G|}\sum\limits_{g\in G}\big(\rho(g)x, \rho(g)y\big)$.

$$(\rho(h)x,y)_G = \frac{1}{|G|}\sum_{g\in G}(\rho(g)\rho(h)x, \rho(g)y) \underset{gh=g'}{=} \frac{1}{|G|}\sum_{g'\in G}(\rho(g')x, \rho(g')\cdot\rho(h^{-1})y) = (x,\rho(h^{-1})y)_G.$$

Имеем: $(\rho(h)x, y)_G = (x, \rho(h)^{-1}y)_G$

$\Rightarrow$ $\boxed{\forall h \in G \text{ оператор } \rho(h) - \text{унитарный отн. } (\,,\,)_G}$

Форма $(x,y)_G$ – эрмитова и полож. опр: $(x,x)_G = \frac{1}{|G|}\sum_{g\in G}(\rho(g)x, \rho(g)x) \geq 0.$

$\Rightarrow (x,x)_G = 0 \Leftrightarrow \rho(g)x = 0 \quad \forall g \in G. \Leftrightarrow x = 0.$

Тогда Если $W \subset V$ – подпредставление, то

$V = W \oplus W^{\perp}$ относительно формы $(\,,\,)_G$.

Поскольку $\rho(h)$ – унитарный опер-р. $\Rightarrow$ $\rho(h)(W^{\perp}) \subset W^{\perp}$.

$\Rightarrow W^{\perp}$ – тоже подпр-ие. $\Rightarrow$ полупростота. $\square$

---

Предложение любое неприводимое представление реализуется, как подпредставление в левом регулярном пр-ии т.е. $\mathbb{K}G$ (рассм. как левый модуль над собой).

Д-во: $A = KG$, $M$ - неприводимый $A$-мод.

тогда $\forall m \neq 0 \in M$ $\underset{\substack{\parallel \\ \{am \mid a \in A\}}}{Am}$ - подмодуль в $M$, $\Rightarrow$ $\underset{\substack{\psi \\ 1 \cdot m = m}}{Am} \overset{\substack{0 \\ \neq}}{}= M$ т.к. $M$ - неприводимый

$\pi: A \longrightarrow Am \subset M.$ $\Rightarrow$ $Am \simeq A/_{\ker \pi}$.

$a \longrightarrow am$

Если $A$ - полупрост $\Rightarrow$ $A \simeq \ker \pi \oplus (\ker \pi)^{\perp}$ $\Rightarrow$ $Am \simeq \underset{\substack{\cap \\ A}}{(\ker \pi)^{\perp}}$.

---

Замечан. Для произвольной алг-ры $A$ любой неприводимый (=простой) реализуется, как фактор $A/_{\ker \pi}$.

---

Итого для конечных групп нужно найти неприводимые подпр-ия в $\mathbb{K}G$.

**Лемма Шура** Пусть $\varphi: M \to N$ — морфизм неприводимых $A$-модулей (морфизм $G$-пр-ий).

$\forall a \in A$ $\forall v \in M$ $\varphi(av) = a\varphi(v)$

тогда $\left[\begin{array}{l}\varphi \equiv 0 \\ \varphi - \text{из-зм.}\end{array}\right.$

**Д-во:** - $\ker\varphi \subset M$ — подмодуль $\xRightarrow{\text{из неприв. } M}$ $\left[\begin{array}{l}\ker\varphi = M \Leftrightarrow \varphi \equiv 0 \\ \ker\varphi = 0 \Leftrightarrow \varphi - \text{вложение.}\end{array}\right.$

- $\operatorname{Im}\varphi \subset N$ — подмодуль $\xRightarrow{\text{из неприв } N}$ $\left[\begin{array}{l}\operatorname{Im}\varphi = N \Leftrightarrow \varphi - \text{сюръекция.} \\ \operatorname{Im}\varphi = 0 \Leftrightarrow \varphi \equiv 0\end{array}\right.$

---

**Сл-ие** Если $\mathbb{k} = \overline{\mathbb{k}}$ (алгебраически замкнуто, например $\mathbb{k} = \mathbb{C}$).

и $\varphi \in \operatorname{End}_A(V)$ тогда $\exists \lambda \in \mathbb{k}$ : $\varphi = \lambda \operatorname{Id}_V$., если $V$ — неприв $A$-mod.

**Д-во:** $\varphi \in \operatorname{End}_A(V)$ то $\forall \lambda \in \mathbb{K}$ $\varphi - \lambda \operatorname{Id}_V \in \operatorname{End}_A(V)$

$\dim V < \infty \Rightarrow \exists \lambda$, собств вектор $v$ : $\varphi(v) = \lambda v$. $\Rightarrow v \in \ker(\varphi - \lambda \operatorname{Id}_V)$.

$\Rightarrow \varphi - \lambda \operatorname{Id}_V$ — не из-зм. $\xRightarrow[\text{Шура}]{\text{по лемме}}$ $\varphi - \lambda \operatorname{Id}_V \equiv 0 \Leftrightarrow \varphi = \lambda \operatorname{Id}_V$.

Если $G$ - конечная группа. $V, W$ - представления $G$.

Опр. ~~Число сплетения~~ $c_G(V,W) := \dim \mathrm{Hom}_G(V,W)$ (зависит от поля $\mathbb{K}$).

Сл-ие (леммы Шура) Если $V$ - неприводимый $\mathbb{K} = \mathbb{C}$

то $c_G(V,V) = 1$. , т.к. $\mathrm{Hom}_G(V,W) = \{\lambda \mathrm{Id} \mid \lambda \in \mathbb{C}\}$.

Если $W$ - тоже неприв, то $c_G(V,W) = \begin{cases} 1, & \text{если } V \simeq W \\ 0, & \text{если } V \not\simeq W. \end{cases}$

$$c_G\left(\bigoplus_{i=1}^{k} V_i^{m_i}, \bigoplus_{i=1}^{k} V^{n_i}\right) = \sum_{i=1}^{k} m_i n_i$$

где $V_1, \dots, V_k$ - различные неприводимые $G$-представл.

$$\mathrm{Hom}\Big(\underbrace{V_1 \oplus \dots \oplus V_1}_{m_1} \oplus \underbrace{V_2 \oplus \dots \oplus V_2}_{m_2} \oplus \dots \;;\; \underbrace{V_1 \oplus \dots \oplus V_1}_{n_1} \oplus \underbrace{\dots}_{n_2} + \cdot\Big) =$$

$$\simeq \bigoplus_{i,j} \underbrace{\mathrm{Hom}(V_i, V_j) \oplus \dots \quad \mathrm{Hom}(V_i, V_j)}_{m_i \cdot n_j} \simeq \bigoplus \mathbb{C}^{m_i n_i}.$$

$$\mathrm{Hom}(V_i,V_j) = \begin{cases} 0 & i \neq j \\ \mathbb{C} & i = j \end{cases}$$

**Предлож.** Левое регулярное пр-ие $\boxed{\mathbb{C}G \simeq \bigoplus_{i \in Irrep(G)} V_i^{\dim V_i}}$ $(*)$

т.е. кратность вхождения неприводимого G-пр-ия V в регулярное равна его размерности.

**Д-во:** $C_G(\mathbb{C}G, V_0)$ $V_0$ – неприводимое

$$C_G(\mathbb{C}G, V_0) = C_G(\oplus V_i^{n_i}, V_0) = n_0$$ – т.е. кратность вхожд. $V_0 \subset \mathbb{C}G$.

С другой стороны $Hom_G(\mathbb{C}G, V) \simeq V$. $\forall$ G-пр-ия V.

т.к. любой G-гом-зм задаётся образом $1 \in \mathbb{C}G$

$1 \longrightarrow v \in V$. на образ 1 никаких ограничений нет.

$g \longrightarrow gv$.

$$\Rightarrow \quad C_G(\mathbb{C}G, V) = \dim V.$$

---

**Сл-ие** $\#G = \sum_{i \in Irrep(G)} \dim V_i^2$ (сумма квадратов dim неприв. пр-ий совпадает с порядком группы).

Вычислим dim левой и правой части в $(*)$.

Проверка: $S_3$ : $\mathbb{1}$, $Sgn$, $V_2$

$$6 = 1 + 1 + 2^2.$$

Пример. $D_n$, $\# D_n = 2n$ $\quad D_n = \langle S, R \mid S^2 = R^n = e \rangle.$
$$SR = R^{-1}S$$

$(n = 2k+1)$ Пусть $v$ - собств вектор для $R$ с собств знач $\zeta$, $\zeta^n = 1$

$RSv = SR^{-1}v = \zeta^{-1}Sv$, если $\zeta \neq \zeta^{-1}$ то вектора $v, Sv$ линейно независимы.

тогда $W = \langle v, Sv \rangle$ $\quad \rho(S) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ - неприводимое 2-ое пр-ие. $\mathbb{C}^2_\zeta$.

$\zeta^k \neq 1$ $\quad \rho(R) = \begin{pmatrix} \zeta & 0 \\ 0 & \zeta^{-1} \end{pmatrix}$

и $\mathbb{C}^2_\zeta \neq \mathbb{C}^2_\eta$, если $\begin{cases} \zeta \neq \eta \\ \zeta \neq \eta^{-1} \end{cases}$ $\quad$ $n-1$ - отличных от $1$ $\zeta, \zeta^{-1}$

Таких пр-ий $\frac{n-1}{2}$ - штук $\qquad 2n = \frac{n-1}{2} \cdot 2^2 + \underbrace{2} = \frac{n-1}{2} 2^2 + 1 + 1$

Есть 2-одномерных пр-ия :

Одномерные пр-ия / $\mathbb{C}$ $\longleftrightarrow$ одн. пр-ия фактора по комм. $G/\underline{G'}$ - конечная абелева группа.

$\rho : G \longrightarrow GL_1(\mathbb{C}) = \mathbb{C}^*$ – абелева группа.

$\Rightarrow$ $\rho(G') = e$ , где $G'$ – коммутант.

\# одном. неприв. пр-ий $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ над $\mathbb{C}$ $\sim$ $n$-разных

$\langle a \mid a^n = 1 \rangle$ $\quad \rho_k(a) = e^{\frac{2\pi i k}{n}}$ – $n$ различных корней.

\# одном. неприв. $\mathbb{C}$-пр-ий абел. группы $G$ $=$ \# $G$.

Следует из леммы о пр-ия прямого произведения групп.

---

<u>Лемма</u> Пусть $G = H \times K$ , $\{V_1, \dots, V_n\} = \mathrm{Irrep}_{\mathbb{C}}(H)$

$\{W_1, \dots, W_m\} = \mathrm{Irrep}_{\mathbb{C}}(K)$.

Тогда $\mathrm{Irrep}_{\mathbb{C}}(G) = \left\{ V_i \otimes W_j \;\middle|\; \begin{array}{l} i = 1, \dots n \\ j = 1, \dots m \end{array} \right\}$.

$\Rightarrow$ $\#\mathrm{Irreps}(\mathbb{Z}/_{n_1} \times \dots \mathbb{Z}/_{n_k}) =$

$= \mathrm{Irrep}(\mathbb{Z}/_{n_1}) \times \dots \times \mathrm{Irreps}(\mathbb{Z}/_{n_k})$

$= \#\mathbb{Z}/_{n_1} \times \dots \times \mathbb{Z}/_{n_k}$.

---

<u>Д-во:</u> Если $V \in \mathrm{Irrep}(H)$, $W \in \mathrm{Irrep}(K)$ то $V \otimes W \in \mathrm{Irrep}(H \times K)$

Если $v \otimes w$ - разлож. то $\mathbb{C}H v \otimes \mathbb{C}K w = V \otimes W$

$\sum \dim (V \otimes W)^2 = \sum \dim V^2 \cdot \dim W^2 =$

$= (\sum \dim V^2) \cdot (\sum \dim W^2) = \#H \cdot \#K$

$= \#G$.

$$C_G(V\otimes W, V\otimes W) = \dim \mathrm{Hom}_{H\times K}(V\otimes W, V\otimes W) = \dim \mathrm{Hom}_H(V,V)\otimes \mathrm{Hom}_K(W,W) =$$

$$\left(\mathrm{Hom}_{\mathbb{C}}(V\otimes W, V\otimes W) \cong \mathrm{Hom}_{\mathbb{C}}(\underbrace{V,V}_{H}) \otimes \mathrm{Hom}_{\mathbb{C}}(\underbrace{W,W}_{K})\right)$$

$$= C_H(V,V)\cdot C_K(W,W) = 1\cdot 1 \iff V\otimes W - \text{неприв.}$$

---

**Квазирегулярное пр-ие:** Пусть $G \curvearrowright X$ (всё конечно).

Тогда $\mathbb{K}G \curvearrowright \mathbb{K}X$ – вект. пр-во с базисом занумерованным эл-ами из $X$.

<u>Пример.</u> $S_n \curvearrowright \{1,\dots,n\}$.

$S_n \curvearrowright \mathbb{K}^n = \langle e_1,\dots,e_n\rangle$.

$\sigma \longrightarrow (e_i \to e_{\sigma(i)})$.

$\sum a_\sigma \cdot \sigma \longrightarrow \left(e_i \to \sum\limits_\sigma a_\sigma e_{\sigma(i)}\right)$

Группа действует перестановками базисных векторов.
(Матрицы действ = матрицы перестановок)

Предл. (про $X$ с одной орбитой) $\boxed{\mathrm{Hom}_G(\Bbbk G/_H, V)} \simeq \mathrm{Hom}_H(\mathbb{1}, V) = [V]^H = \{v\in V \mid \forall h\in H\ hv=v\}$.

Если $X = G/_H$ (т.е. действие $G \curvearrowright X$ – транзитивно) $H = \mathrm{Stab}(x)$

$\Bbbk G/_H$ – квазирегулярное пр-ие.

Если $X = X_1 \sqcup X_2$ то $\Bbbk X = \Bbbk X_1 \oplus \Bbbk X_2$ поэтому интересно, когда $X$ – одна орбита

Пусть $\varphi \in \mathrm{Hom}_G(-, V)$

Посмотрим куда переходит $1 \in \Bbbk G/_H$ $\varphi(1) = v$.

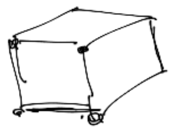
имеем $gv = g\varphi(1) = \varphi(g)$ $\Rightarrow$ образом 1 всё опред.

$1\cdot H = h\cdot H \ \forall h\in H.$

имеется условие $\forall h\in H$ $h\varphi(1) = \varphi(h) = \varphi(1)$

Сл-ие $C_G(\Bbbk G/_H, \Bbbk G/_K) = \#_H \backslash G/_K = \#H$ орбит в $G/_K$.

(т.к. коэф при $gK$ и $hgK$ у $v \in [\Bbbk G/_K]^H$ должны быть одинаковыми.

<u>Пример</u> Пр-ие $S_4$. $\curvearrowright$  перестановкой главных диагоналей.

$S_4$ группа движений куба.

Таблицу чисел сплетения между $\mathbb{C}X_{..}$, $\mathbb{C}X_{..}$

6 $X_f$ — мн-во граней $= S_4/\mathbb{Z}_4$

8 $X_v$ — мн-во вершин

4 $X_d$ — диагонали

2 $X_t$ — тетраэдр

1 $X_c$ — центр.

| | $f$ | $v$ | $d$ | $t$ | $c$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $\tilde{f}+c+\tilde{v}=f$ | $?=3^{=1+1+1}$ | 2 | 1 | 1 | 1 |
| $=v$ | 2 | 4 | 2 | 2 | 1 |
| $c+\tilde{d}=d$ | 1 | 2 | $2^{=1+1}$ | 1 | 1 |
| $c+\tilde{t}=t$ | 1 | 2 | 1 | $2^{=1+1}$ | 1 |
| Непр $=c$ | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 |

неприводим.

? — $\mathbb{Z}_4$-орбиты на $X_f$ 

$\Rightarrow X_c$ — неприв, $X_t = X_c$

Получим 4-неприв. пр-ия.

Более подробное описание есть в pdf файле, добавленному к материалам лекций.

$$c(X_t, X_t) = 2$$
$$c(X_t, X_c) = 1$$

$\Rightarrow X_t = X_c \oplus \tilde{X}_t \Rightarrow \tilde{X}_t$ - тоже неприводимо.

$$c(X_t, X_t) = 1 + 1$$

---

<u>Замечание:</u> $V = \oplus V_i^{m_i}$. $V_i$ - неприв.

то $c_G(V, V) = \sum m_i^2$.

$$\mathrm{Hom}_{\mathbb{F}}(\mathbb{F}\otimes_{\mathbb{K}} V, \mathbb{F}\otimes_{\mathbb{K}} W) = \mathbb{F}\otimes_{\mathbb{K}} \mathrm{Hom}_{\mathbb{K}}(V,W).$$

$$\begin{tikzcd}
V \arrow[r, "\varphi"] \arrow[d, "e_1,\dots e_n"'] & W \arrow[d] \\
F(V) \arrow[r, dotted, "F(\varphi)"] & F(W)
\end{tikzcd}$$

$$F(V) \cong V\langle e_1, \dots e_n, e_3, e_5 \rangle.$$