Семинар 7. Симметрические многочлены, продолжение

Задача 7.1. Разбиением длины m числа n называется набор λ целых положительных чисел $(\lambda_1, \ldots, \lambda_m)$, где $\lambda_1 \geqslant \lambda_2 \geqslant \ldots \geqslant \lambda_m > 0$ и $\lambda_1 + \ldots + \lambda_m = n$.

Пусть $p(n)$ – число разбиений числа n, соответственно $p(n,m)$ – число разбиений числа n длины не превосходящей m. Докажите, что

(а) $\prod_{i=1}^{\infty}(1-t^i)^{-1} = \sum_{n=0}^{\infty} p(n)t^n$; **(б)** $\prod_{i=1}^{m}(1-t^i)^{-1} = \sum_{n=0}^{\infty} p(n,m)t^n$.

Задача 7.2. Докажите соотношения и тождества между элементарными симметрическими функциями $e_k := \sum_{i_1<\ldots<i_k} x_{i_1}\ldots x_{i_k}$ и степенными суммами Ньютона: $p_k := \sum_i x_i^k$:

(а) (*Формулы Ньютона*)

$$p_k - e_1p_{k-1} + e_2p_{k-2} + \ldots + (-1)^{k-1}e_{k-1}p_1 + (-1)^k kp_k = 0.$$

Детерминантные формулы:

(б) $p_k = \begin{vmatrix} e_1 & 1 & 0 & \ldots & 0 & 0 \\ 2e_2 & e_1 & 1 & \ldots & 0 & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ (k-1)e_{k-1} & e_{k-2} & e_{k-3} & \ldots & e_1 & 1 \\ ke_k & e_{k-1} & e_{k-2} & \ldots & e_2 & e_1 \end{vmatrix}$; **(в)** $k!e_k = \begin{vmatrix} p_1 & 1 & 0 & \ldots & 0 & 0 \\ p_2 & p_1 & 2 & \ldots & 0 & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ p_{k-1} & p_{k-2} & p_{k-3} & \ldots & p_1 & k-1 \\ p_k & p_{k-1} & p_{k-2} & \ldots & p_2 & p_1 \end{vmatrix}$;

Задача 7.3.

(а) Дайте определение кососимметрического многочлена от n переменных и докажите, что определитель Вандермонда $\Delta(x_1, \ldots, x_n) = \prod_{i<j}(x_i - x_j)$ является таковым.

(б) Докажите, что всякий кососимметрический является произведением Вандермонда и симметрического.

(в) Пусть $f(x_1, \ldots, x_n)$ – симметрический многочлен, равный 0, при $x_i = x_j$ для некоторой пары индексов $i < j$. Докажите, что $f(x_1, \ldots, x_n) = \Delta^2 g(x_1, \ldots, x_n)$ для некоторого симметрического многочлена $g(x_1, \ldots, x_n)$.

Определение 7.1. *Для каждого набора целых неотрицательных чисел* $\alpha := (\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$ *определим многочлен* $a_\alpha := \begin{vmatrix} x_1^{\alpha_1} & \ldots & x_n^{\alpha_1} \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ x_1^{\alpha_n} & \ldots & x_n^{\alpha_n} \end{vmatrix}$. *В частности, если* $\delta = (n-1, n-2, \ldots, 1, 0)$, *то* a_δ *– это определитель Вандермонда* Δ.

Задача 7.4. Докажите, что **(а)** $a_{\sigma(\alpha)} = (-1)^\sigma a_\alpha$ для $\sigma \in \mathbb{S}_n$;

(б) множество многочленов a_α образуют базис в векторном пространстве кососимметрических многочленов, если из этого набора выкинуть все пропорциональные и равные нулю многочлены.

(в) множество многочленов Шура $s_\lambda := a_{\lambda+\delta}/a_\delta$, где $\lambda = (\lambda_1 \geqslant \ldots \geqslant \lambda_n)$ – разбиение длины не больше n, образует базис в пространстве симметрических многочленов.

(г) $e_n = s_{(1,\ldots,1)}$; **(д)** $h_n = s_{(n,0,\ldots,0)}$.

Задача 7.5. Зафиксируем натуральное число n и пусть $\Xi := \{\zeta_1, \ldots, \zeta_k\}$ – множество примитивных корней из 1 степени n.

(а) Покажите, что $p_m(\zeta_1, \ldots, \zeta_k) \in \mathbb{Z}$ для всех m;

(б) Покажите, что круговой многочлен $\Phi_n(x) := \prod_{i=1}^{k}(x - \zeta_i)$ может быть определен индуктивно

$$\Phi_n(x) := \frac{x^n - 1}{\prod_{d|n}\Phi_d(x)},$$

выведите отсюда, что $e_m(\zeta_1, \ldots, \zeta_k) \in \mathbb{Z}$.

(в) Вычислите результант многочленов $\frac{x^n-1}{x-1}$ и $\frac{x^m-1}{x-1}$;

(г)* Вычислите результант $x^n - 1$ и кругового многочлена $\Phi_m(x)$.