Семинар 8. Тензорное произведение векторных пространств

Задача 8.1. Пусть векторы $v_1, \dots, v_d$ – линейно независимы в V. Докажите, что для любого ненулевого векторного пространства W каждое из подпространств $W_i := \langle v_i \rangle \otimes W \subset V \otimes W$ изоморфно W, а их сумма является прямой. Через $\langle v_i \rangle$ обозначено одномерное подпространство в V, натянутое на вектор $v_i \in V$.

Задача 8.2. Пусть U, V - конечномерные векторные пространства. Пусть $A : U \to U, B : V \to V$. Определим оператор

$$A \otimes B : U \otimes V \to U \otimes V, \text{ положив } u \otimes v \mapsto A(u) \otimes B(v).$$

(а) Как связана матрица тензорного произведения операторов с матрицами самих операторов? Найдите $\mathsf{rk}(A \otimes B)$, $\mathrm{Tr}(A \otimes B)$ и $\det(A \otimes B)$, зная ранг, след и определитель операторов A и B.

(б) Докажите, что $A \otimes B$ – диагонализируем, если A и B – диагонализуемы, и выразите собственные значения $A \otimes B$ через собственные значения A и B.

(в) Покажите, что если операторы A и B – нильпотентные, то оператор $A \otimes B$ – нильпотентный.

(г) Пусть $A : U \to U$ и $B : V \to V$ – жордановы клетки. Найдите жорданову форму $A \otimes B$.

(д) Докажите, что $\exp(A \otimes E + E \otimes A) = \exp(A) \otimes \exp(A)$.

(е)* Выразите характеристический многочлен $A \otimes B$ через характеристические многочлены A и B.

Задача 8.3. Пусть $\dim V = k$, $\dim W = m$. Сколько орбит у действия группы $\mathsf{G}L(V) \times \mathsf{G}L(W)$

(а) на пространстве отображений $\mathrm{Hom}(V, W)$;

(б) на тензорном произведении пространств $V \otimes W$.

Задача 8.4. Пусть U, V – конечномерные векторные пространства. Известно, что отображение

$$U^* \otimes V \to \mathrm{Hom}(U, V), \ \xi \otimes v \mapsto \xi(v)$$

является каноническим изоморфизмом.

(а) Пользуясь каноническим изоморфизмом запишем операторы $A : U \to V$ и $B : V \to W$ в виде $A = \sum_i \alpha_i \otimes a_i, B = \sum_j \beta_j \otimes b_j$, где $\alpha_i \in U^*, a_i \in V, \beta_j \in V^*, b_j \in W$. Запишите аналогичным образом оператор $BA : U \to W$.

(б) Пусть $e_i \in V, e_i^* \in V^*$ – двойственные базисы. Докажите, что *элемент Казимира* $\sum_i e_i^* \otimes e_i \in V^* \otimes V$ не зависит от выбора базиса.

Задача 8.5. Постройте канонические изоморфизмы

(а) $U^* \otimes V^* \simeq (U \otimes V)^*$;

(б) $\mathrm{Hom}(\mathrm{Hom}(U, V), W) \simeq \mathrm{Hom}(V, U \otimes W)$;

(в) $\mathrm{End}(V \otimes W) \simeq \mathrm{End}(V) \otimes \mathrm{End}(W)$.