Семинар 10. (Косо)симметричные тензоры

Задача 10.1.

(а) Для n-мерного пространства V вычислите размерности пространства симметричных S^kV и кососимметричных тензоров Λ^kV.

(б) Покажите, что $V^{\otimes 3} \supsetneq S^3V \oplus \Lambda^3V$. и предъявите явно тензор из $V^{\otimes 3}$, который не является суммой симметрического и кососимметрического.

Задача 10.2. С каждым линейным оператором A в (конечномерном) векторном пространстве V свяжем операторы $\Lambda^kA : \Lambda^kV \to \Lambda^kV$ и $S^kA : S^kV \to S^kV$, определённые по правилам

$$v_1 \wedge \ldots \wedge v_k \to Av_1 \wedge \ldots \wedge Av_k; \quad v_1 \cdot \ldots \cdot v_k \to Av_1 \cdot \ldots \cdot Av_k.$$

(а) Докажите, что коэффициенты матрицы $\Lambda^k(A)$ в базисе $e_{i_1} \wedge \ldots \wedge e_{i_k}$ есть миноры матрицы A.

(б) Выразите собственные значения S^kA и Λ^kA через собственные значения диагонализуемого оператора A;

(в) Пусть $\operatorname{char} \Bbbk = 0$. Докажите, равенство производящих функций

$$\frac{1}{\det(E - tA)} = \sum_{k \geqslant 0} tr(S^kA)t^k; \quad \det(E + tA) = \sum_{k=0}^{n} \operatorname{tr}(\Lambda^kA)t^k$$

Задача 10.3. Постройте канонический изоморфизм $\oplus_{k=0}^n \Lambda^k(U) \otimes \Lambda^{n-k}(V) \to \Lambda^n(U \oplus V)$.

Задача 10.4. Тензор $w \in \Lambda^2V$ называется разложимым, если он может быть представлен в виде $u_1 \wedge u_2$. Докажите, что

(а) тензор $w \in \Lambda^2(V)$ разложим если и только если $w \wedge w = 0$;

(б) для любого двумерного подпространства $U \subset V$ тензор $w_U := u_1 \wedge u_2$, построенный по базису $u_1, u_2 \in U$ определен однозначно с точностью до умножения на константу.

Тем самым w_U задает отображение из множества двумерных плоскостей в V (называемых грассманианом $\operatorname{Gr}(2, V)$) в проективное пространство $\mathbb{P}(\Lambda^2V)$. Построенное отображение называется вложением Плюккера.

(в) Напишите явно уравнение $w_U \wedge w_U = 0$ в координатах $w_U = \sum p_{ij}(U) e_i \wedge e_j$ для $1 \leqslant i < j \leqslant 4$, задающее вложение Плюккера $Gr(2, \mathbb{C}^4) \hookrightarrow \mathbb{CP}^5$.