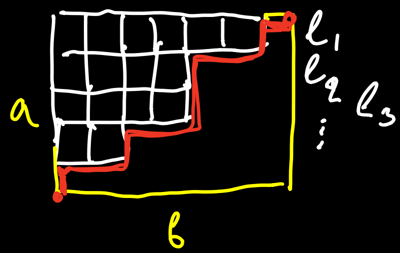
Разбиения и диаграммы Юнга

$n = l_1 + \dots + l_k \qquad l_1 \geq l_2 \geq \dots \geq l_k.$

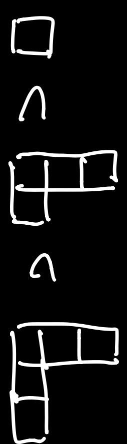


$$P(q) = \sum p(n) q^n = \prod_{k=1}^{\infty} \frac{1}{1-q^k}$$

$k \leq a, \quad l_1 \leq b$:

число д.Ю = число путей = $\binom{a+b}{b} = \binom{a+b}{a}$

Плоские разбиения = Трёхмерные диаграммы Юнга.

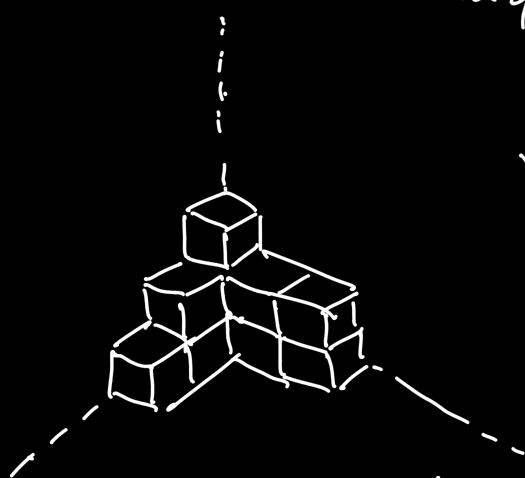


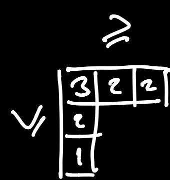
λ_1

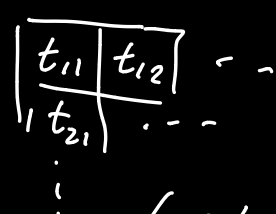
λ_2

λ_3

$\lambda_1 \subseteq \lambda_2 \subseteq \lambda_3$







$t_{ij} \geq t_{ij+1}$

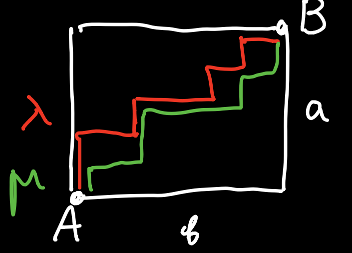
$t_{ij} \geq t_{i+1j}$

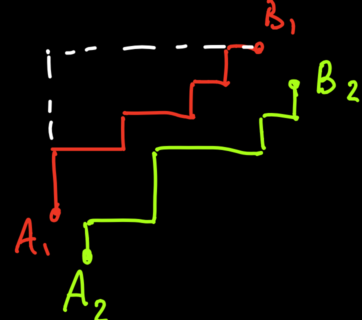
Основной вопрос: сколько сущ. плоских разбиений, помещающихся в "аквариум" $a \times b \times c$?

$$\mathbb{P}(a,b,c)=?$$

Знаем: $\mathbb{P}(a,b,1)=\binom{a+b}{b}$.

Решим для $c=2$: $\#\{\lambda\subset\mu\subset a\times b\}=?$





Вопрос: сколько пар непересек. путей:

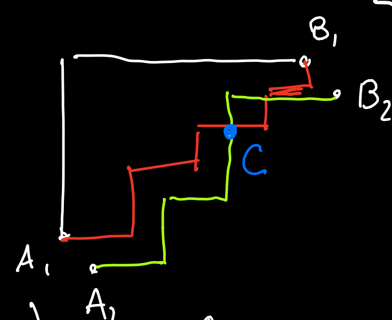
$A_1\to B_1$

$A_2\to B_2$?

Всего пар путей:

$\binom{a+b}{b}^2$.

Найдем число пар пересекающихся путей.



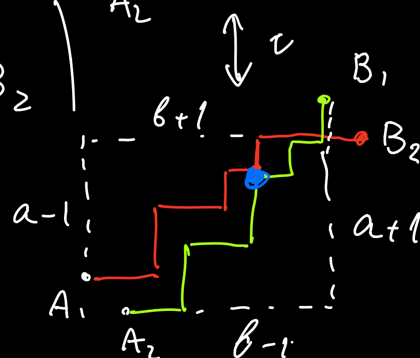
$$\tau:\begin{pmatrix}\text{пара пересекающихся путей}\\ A_1\to B_1,\ A_2\to B_2\end{pmatrix}$$

$$\updownarrow$$

$$\begin{pmatrix}\text{пара }\cancel{\text{перес.}}\text{ путей}\\ A_1\to B_2,\ A_2\to B_1\end{pmatrix}.$$

$$\downarrow\qquad\qquad\searrow$$

$$\binom{a+b}{b+1}\qquad\binom{a+b}{b-1}.$$

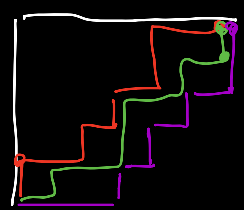


Теорема. $\mathbb{P}(a,b,2) = \binom{a+b}{b}^2 - \binom{a+b}{b-1}\cdot\binom{a+b}{b+1} =$

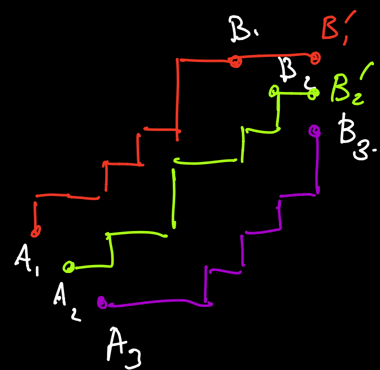
$$= \begin{vmatrix} \binom{a+b}{b} & \binom{a+b}{b+1} \\ \binom{a+b}{b-1} & \binom{a+b}{b} \end{vmatrix}.$$

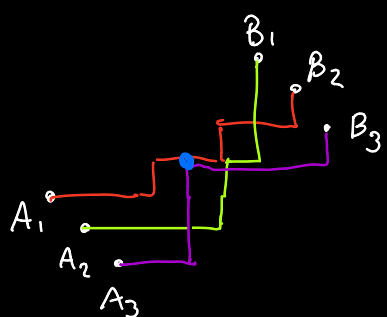
Будем рассм. наборы из c путей соед. $A_1, \dots A_c$ с $B_{w(1)}, B_{w(2)}, \dots B_{w(c)}$, где $w \in S_c$

$\{1, \dots c\} \to \{1, \dots c\}$.

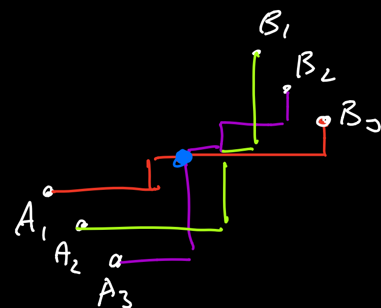


$c = 3$





$\overset{2}{\longleftrightarrow}$

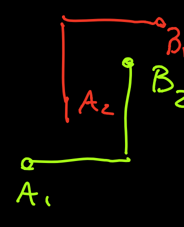


$w: 1 \to 2,\ 2 \to 1,\ 3 \to 3$

Возьмем путь с наим. номером, к-рый с кем-то перес. Пусть C - первая точка перес. не [illegible]

$w': 1 \to 3$
$2 \to 1$
$3 \to 2.$

Упр. на подумать В.К.): что у е ситуации типа



Путей из A_i в B_j: $\binom{a+b}{b+j-i} = P(A_i \to B_j)$

у

$$\begin{pmatrix}\text{число наборов}\\ \text{неперес. путей}\end{pmatrix} = \sum_{w\in S_c} (-1)^{w} \cdot \left(\begin{matrix}\text{число наборов путей,}\\ \text{отвеч. перест. } w\end{matrix}\right) =$$

$$= \sum (-1)^{w} P(A_1\to B_{w(1)})\cdot P(A_2\to B_{w(2)})\dots P(A_c\to B_{w(c)})$$

$$= \det\left(P(A_i\to B_j)\right)_{i,j=1}^{c} = \begin{vmatrix} P(A_1\to B_1) & P(A_1\to B_2) & \dots & P(A_1\to B_c)\\ P(A_2\to B_1) & P(A_2\to B_2) & \dots & P(A_2\to B_c)\\ - & - & - & -\\ P(A_c\to B_1) & & & P(A_c\to B_c)\end{vmatrix}$$

<u>Теорема.</u> $\mathbb{P}(a,b,c) = \det\left(\binom{a+b}{b+j-i}\right)_{i,j=1}^{c} =$

$$= \begin{vmatrix} \binom{a+b}{b} & \binom{a+b}{b+1} & \dots & \binom{a+b}{b+c-1}\\ \binom{a+b}{b-1} & \binom{a+b}{b} & \dots & \binom{a+b}{b+c}\\ - & - & - & -\end{vmatrix}$$

Детерминантное выраж. для числа плоских разб. в $a\times b\times c$.

<u>Следствие:</u> $\mathbb{P}(a,b,c) = \det\binom{a+b+i-1}{b+j-1}_{i,j=1}^{c} = \begin{vmatrix} \binom{a+b}{b} & \binom{a+b}{b+1} & \dots & \binom{a+b}{b+c-1}\\ \binom{a+b+1}{b} & \binom{a+b+1}{b+1} & \dots & \\ \vdots & & & \\ \binom{a+b+c-1}{b} & \dots & & \end{vmatrix}$

<u>Упр.</u> Д-ть это.

Вычислим $\det\binom{a+b+i-1}{b+j-1} \overset{(*)}{=}$

$$\binom{a+b+i-1}{b+j-1} = \frac{(a+b+i-1)^{\downarrow(b+j-1)}}{(b+j-1)!}.$$

$$\overset{(*)}{=} \frac{1}{b!\,(b+1)!\dots(b+c-1)!}\det\left((a+b+i-1)^{\downarrow b+j-1}\right) =$$

$$(a+b+i-1)^{\downarrow b+j-1} = (a+b+i-1)^{\downarrow b}(a+i-1)^{\downarrow j-1}$$

$$= \frac{\prod_{i=1}^{c}(a+b+i-1)^{\downarrow b}}{\prod^{c}(b+i-1)!} \det\left((a+i-1)^{\downarrow j-1}\right).$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ x_1 & x_2 & & x_n \\ x_1^{\downarrow 2} & x_2^{\downarrow 2} & & x_n^{\downarrow 2} \\ \\ x_1^{\downarrow n-1} & x_2^{\downarrow n-1} & & x_n^{\downarrow n-1} \end{vmatrix} = \prod_{i>j}(x_i - x_j)$$

Упр. $\det(P_i(x_j)) = \prod_{i>j}(x_i - x_j)$, если $P_i = x^{i-1} + \dots$

$$\det(a+i-1)^{\downarrow j-1} = 1!\,2!\dots(c-1)!$$

$$\mathbb{P}(a,b,c) = \prod_{j=1}^{c}(a+b+j-1)^{\downarrow b} \cdot \prod_{j=1}^{c}\frac{(j-1)!}{(b+j-1)!} =$$

$$= \prod_{j=1}^{c}\frac{(a+b+j-1)^{\downarrow b}}{(b+j-1)^{\downarrow b}} = \prod_{j=1}^{c}\prod_{i=1}^{b}\frac{a+i+j-1}{i+j-1}$$

$$\frac{a+i+j-1}{i+j-1} = \frac{a+i+j-1}{a+i+j-2}\cdot\frac{a+i+j-2}{a+i+j-3}\cdots\frac{i+j}{i+j-1} = \prod_{k=1}^{a}\frac{i+j+k-1}{i+j+k-2}$$

Теорема. (формула МакМагона).

$$\mathbb{P}(a,b,c) = \prod_{k=1}^{a}\prod_{i=1}^{b}\prod_{j=1}^{c}\frac{i+j+k-1}{i+j+k-2}.$$

$$\mathbb{P}_q(a,b,c) = \sum_{\underline{\lambda} \subset a\times b\times c} q^{|\underline{\lambda}|} \qquad |\underline{\lambda}| = \text{общ. число кубиков}$$

Теор. $$\mathbb{P}_q(a,b,c) = \prod_{i,j,k} \frac{[i+j+k-1]_q}{[i+j+k-2]_q}; \qquad [\alpha]_q = \frac{1-q^\alpha}{1-q}$$

Упр. Вывести отсюда, что $\mathbb{P}_q(\infty,\infty,\infty) = \mathbb{P}_q$ равно

$$\boxed{\mathbb{P}_q = \prod_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(1-q^k)^k}}$$

формула Макмагона