08. 04. 20

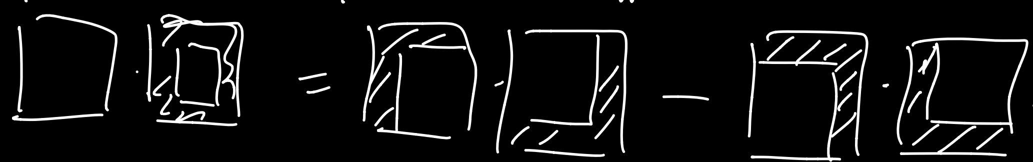
Лекция 9

Конденсация определителей и тождество Льюиса Кэрролла

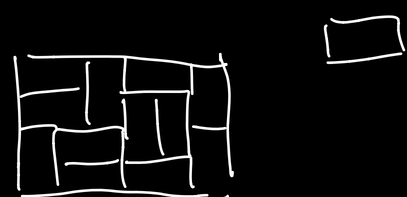
Теор. $A \in Mat(n)$, $M = \det A$

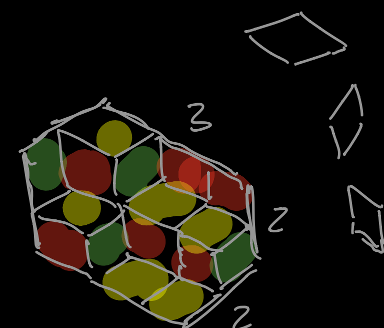
M_i^j — минор, получ. вычерк. i-й строки j-го столбца

$$M \cdot M_{1n}^{1n} = M_1^1 M_n^n - M_1^n M_n^1 .$$



"Геометрическая конденсация".



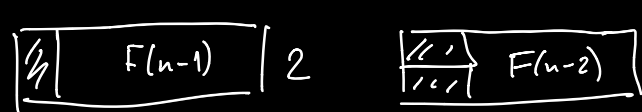


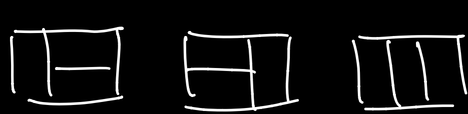
Вопрос: сколько существует разбиений данной фигуры на доминошки?

lozenge tiling

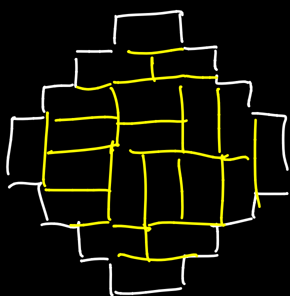
замощение ромбиками

К.В.





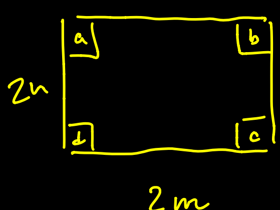
3



Вопрос: скольким способами n можно разбить ацт. бриллиант пор. n на домино?

Ацтекский бриллиант

(aztec diamond)



Пусть дан прямоуг. $2n \times 2m$, a, b, c, d - его углы F.

(или, более общим образом, 4 клетки на границе, идущие в пор. "a,b,c,d", причем a, c одного цвета, b, d другого.

F

$F_{ab} = F \setminus \{a,b\}$,

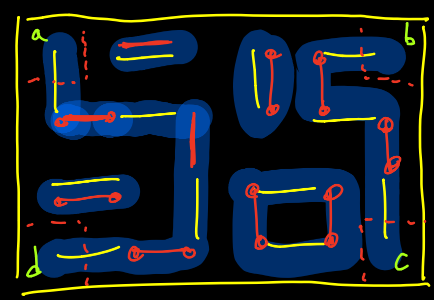
$F_{b,c} = F \setminus \{b,c\}$.

$\ldots$

$F_{abcd} = F \setminus \{a,b,c,d\}$.

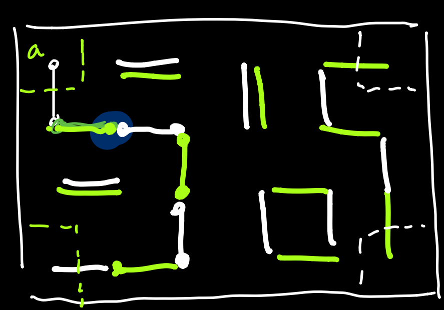
Лемма $\#F \cdot \#F_{abcd} = \#F_{ab}\#F_{cd} + \#F_{bc} \cdot \#F_{ad}.$

Д-во.



Замощение F :

Замощение F_{abcd}



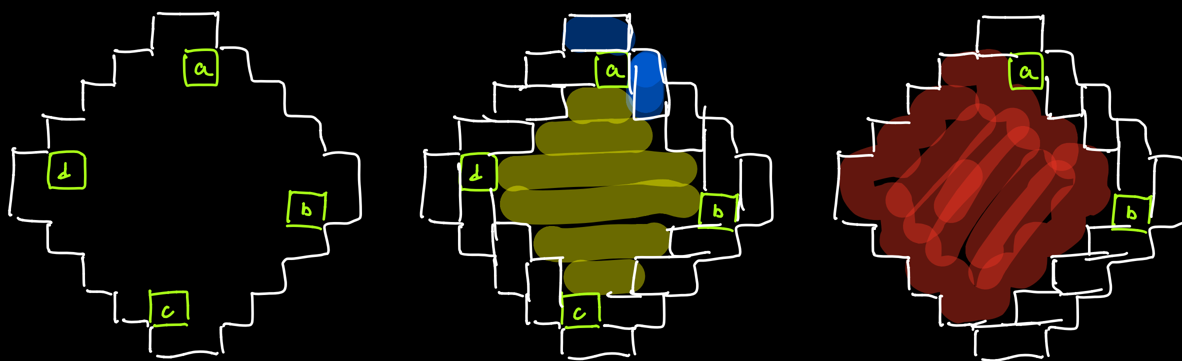
Пар таких замощений:

$LHS = \#F \cdot \#F_{abcd}.$

Из конф. (F, F_{abcd})

получили (F_{ad}, F_{bc}).

либо конф. (F_{ab}, F_{cd}).



$\#F = AD(n)$ $\qquad \#F_{abcd} = AD(n-2)$ $\qquad \#F_{ab} = AD(n-1)$.

$AD(n)$ – число замощений ацт. бриллианта пор. n.

Из леммы: $$AD(n)\cdot AD(n-2) = 2\,AD^2(n-1).$$

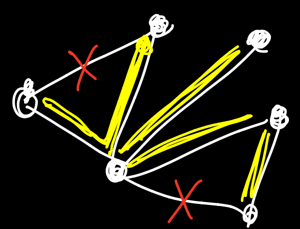
$AD(0)=1 = 2^0$ $\qquad AD(1)=2 = 2^1$ $\qquad AD(2)=8 = 2^3$ $\qquad AD(3) = 2^6 = 64$

Теор. $$AD(n) = 2^{\frac{n(n+1)}{2}} = 2^{\binom{n+1}{2}}.$$

Задача. Рассм. замощение шестиугольника на бумаге в $\triangle$ со сторонами a, b, c.

Выведите при помощи конденсации ф-лу Макмагона.

Остовные деревья в графах и теорема Кэли.



Γ - граф

$V(\Gamma)$ - вершины

$E(\Gamma)$ - рёбра

<u>Опр.</u> <u>Дерево</u> — связный граф без циклов.

В дереве $|V(\Gamma)|-1$ рёбер

<u>Остовное дерево</u> - это граф $\Gamma' \subset \Gamma$,

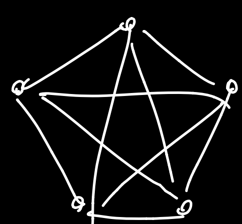
$V(\Gamma') = V(\Gamma)$, $E(\Gamma') \subset E(\Gamma)$, Γ' - дерево

(spanning tree).

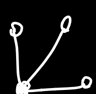
<u>Вопрос:</u> сколько сущ. остовных деревьев для Γ?

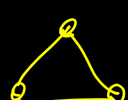
Сегодня: найдем число остовных деревьев в K_n.

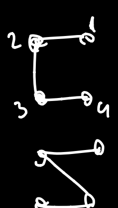
(K_n - <u>полный</u> граф).



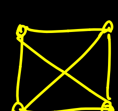
 K_2 : $1 = 2^0$ ост. дерево.

 4

 K_3 $3 = 3^1$



12

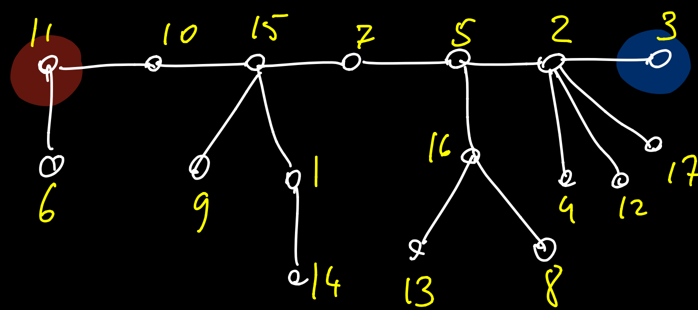
 K_4 $16 = 4^2$

K_5 $125 = 5^3$

Теорема Кэли. Число остовных деревьев в K_n равно n^{n-2}.

Д-во. (Joyal). Найдём число деревьев с n пронумерованными вершинами.

$T(n)$ – число таких деревьев.



$D(n)$ – число бикорневых деревьев

"начало"

"конец".

(могут совпадать!).

Хотим д-ть: $D(n) = n^n = |\mathrm{Map}(\{1,\dots,n\}\circlearrowleft)|$

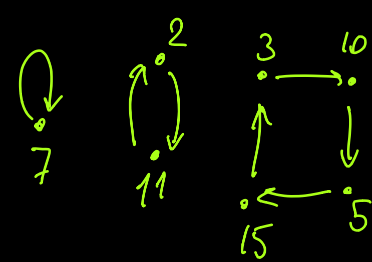
Цепочка вершин: $11 — 10 — 15 — 7 — 5 — 2 — 3$

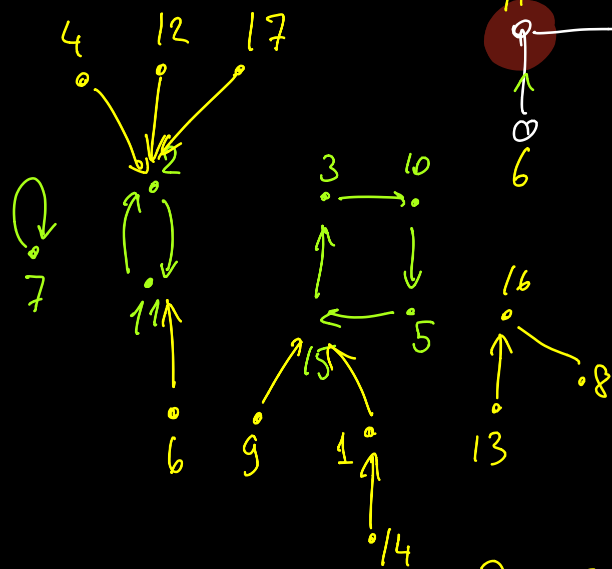
(всего k вершин) $b_1 \quad b_2 \quad \dots \quad b_k$.

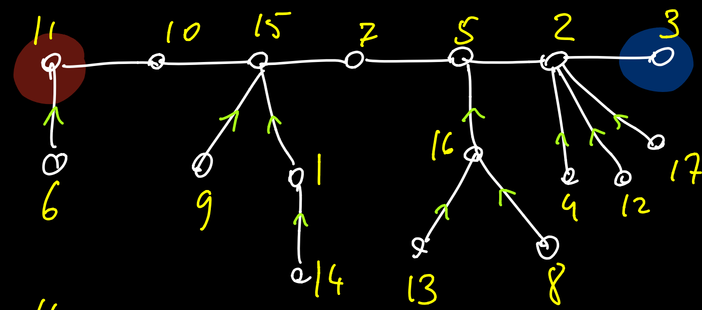
Пусть $(a_1 < a_2 < \dots < a_k)$ – упорядочение набора $\{b_1, \dots, b_k\}$.

σ: перестановка, $a_i \mapsto b_i$

$$\begin{array}{ccccccc} 2 & 3 & 5 & 7 & 10 & 11 & 15 \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow \\ 11 & 10 & 15 & 7 & 5 & 2 & 3 \end{array}$$







Мы получили ориент. граф, где из любой вершины исходит ровно одна стрелка.

Это биекция с $\mathrm{Map}(\{1,..n\} \to \{1,..n\})$.

Тем самым $D(n) = n^n$, а $T(n) = n^{n-2}$.

$\blacksquare$