Листок 2. Структуры Ходжа

Упражнение 2.1. Строгие морфизмы

(i) Приведите пример морфизма фильтрованных векторных пространств $\varphi\colon F^\bullet V \to F^\bullet V'$, не являющегося строгим.

(ii) Приведите пример строгих морфизмов фильтрованных векторных пространств $\varphi\colon F^\bullet V \to F^\bullet V'$ и $\varphi'\colon F^\bullet V' \to F^\bullet V''$, для которых композиция $\varphi' \circ \varphi$ не является строгой. (Указание: например, пусть $\dim(V') = 2$, $F^0 V' = V'$, $\dim(F^1 V') = 1$, $F^2 V' = 0$. Далее подберите подходящее одномерное подпространство $V \subset V'$ и одномерный фактор $V' \to V''$ с индуцированными фильтрациями.)

(iii) Для произвольного градуированного векторного пространства $U^\bullet$ рассмотрим фильтрованное векторное пространство $V = \bigoplus\limits_{i\in\mathbb{Z}} U^i$ с фильтрацией $F^p V = \bigoplus\limits_{i\geqslant p} U^i$. Докажите, что соответствующий функтор переводит произвольные морфизмы между градуированными векторными пространствами в строгие морфизмы фильтрованных векторных пространств.

Упражнение 2.2. Чистые структуры Ходжа

Докажите равносильность следующих трех определений чистой структуры Ходжа веса $n \in \mathbb{Z}$:

(а) конечномерное векторное пространство H над $\mathbb{Q}$ и градуировка $H_\mathbb{C} = \bigoplus\limits_{p+q=n} H_\mathbb{C}^{p,q}$, для которой $\overline{H_\mathbb{C}^{p,q}} = H_\mathbb{C}^{q,p}$;

(б) конечномерное векторное пространство H над $\mathbb{Q}$ и убывающая фильтрация $F^\bullet H_\mathbb{C}$, для которой отображение суммирования

$$\bigoplus_{p+q=n} \left(F^p H_\mathbb{C} \cap \overline{F^q H_\mathbb{C}}\right) \longrightarrow H_\mathbb{C}$$

является изоморфизмом;

(в) конечномерное векторное пространство H над $\mathbb{Q}$ и убывающая фильтрация $F^\bullet H_\mathbb{C}$, для которой при любом $p \in \mathbb{Z}$ отображение суммирования

$$F^p H_\mathbb{C} \oplus \overline{F^{n+1-p} H_\mathbb{C}} \longrightarrow H_\mathbb{C}$$

является изоморфизмом.

(Указание: градуировка и фильтрация связаны по формулам

$$F^p H_{\mathbb{C}} = \bigoplus_{i \geqslant p} H_{\mathbb{C}}^{i,n-i}, \qquad H_{\mathbb{C}}^{p,q} = F^p H_{\mathbb{C}} \cap \overline{F^q H_{\mathbb{C}}}.$$

Для доказательства того, что из (в) следует (а), используйте индукцию по числу нетривиальных присоединенных факторов фильтрации, при этом для наибольшего r с $\mathrm{gr}_F^r H_{\mathbb{C}} \neq 0$ покажите, что имеется изоморфизм комплексных векторных пространств

$$H_{\mathbb{C}} \simeq \left(F^r H_{\mathbb{C}} \oplus \overline{F^r H_{\mathbb{C}}}\right) \oplus \left(F^{n+1-r} H_{\mathbb{C}} \cap \overline{F^{n+1-r} H_{\mathbb{C}}}\right),$$

коммутирующий с комплексным сопряжением.)

Упражнение 2.3. Морфизмы между чистыми структурами Ходжа

(i) Докажите, что все морфизмы между чистыми структурами Ходжа одинакового веса являются строгими относительно фильтрации Ходжа. (Указание: воспользуйтесь определением (а) из упражнения 2.2(i), а также упражнением 2.1(iii).)

(ii) Докажите, что аддитивная категория, состоящая из чистых структур Ходжа фиксированного веса, является абелевой.

(iii) Покажите, что не существует ненулевых морфизмов из чистой структуры Ходжа веса n в чистую структуру Ходжа веса n' при $n > n'$. (Указание: рассмотрите соответствующие морфизмы между градуированными векторными пространствами, коммутирующие с комплексным сопряжением.)

Упражнение 2.4. Тензорное произведение чистых структур Ходжа

(i) Докажите, что для чистых структур Ходжа H и H' весов n и n', соответственно, тензорное произведение фильтраций Ходжа на $H_{\mathbb{C}}$ и $H'_{\mathbb{C}}$ корректно задает чистую структуру Ходжа $H \otimes H'$ веса $n+n'$. (Указание: воспользуйтесь определением (а) из упражнения 2.2(i), а также тем, как устроено тензорное произведение градуированных векторных пространств.)

(ii) Проверьте, что имеется канонический изоморфизм

$$\mathbb{Q}(n)_H \otimes \mathbb{Q}(n')_H \simeq \mathbb{Q}(n+n')_H\,, \qquad n, n' \in \mathbb{Z}\,,$$

где $\mathbb{Q}(1)_H = \mathbb{Q}(-1)_H^\vee$, а $\mathbb{Q}(-1)_H = H^2(\mathbb{P}^1)$.

(iii) Покажите, что в тензорной симметрической категории, состоящей из прямых сумм чистых структур Ходжа различных весов, есть внутренний Hom, который строится при помощи внутреннего Hom'а в категории фильтрованных векторных пространств.

Упражнение 2.5. Структура Ходжа $H^1(\mathbb{G}_m)$ над $\mathbb{Q}$

Покажите, что имеется канонический изоморфизм $H^1(\mathbb{G}_m) \simeq \mathbb{Q}(-1)_H$ в категории смешанных структур Ходжа $\mathrm{MH}(\mathbb{Q})$ над $\mathbb{Q}$. Проверьте, что период данной структуры Ходжа является классом числа $2\pi i$ в $\mathbb{C}^*/\mathbb{Q}^*$. (Указание: рассмотрите длинную точную последовательность когомологий, связанную с замкнутым вложением $\{0,1\} \subset \mathbb{P}^1$ и с вложением дополнения $\mathbb{G}_m \subset \mathbb{P}^1$.)

Далее k является подполем в $\mathbb{C}$.

Упражнение 2.6. Расширения разных весов

Покажите, что для любых чистых структур Ходжа H и H' весов n и n', соответственно, имеется равенство $\mathrm{Ext}^1_{\mathrm{MH}(k)}(H, H') = 0$ при $n < n'$. (Указание: для возможного расширения

$$0 \longrightarrow H' \longrightarrow \widetilde{H} \longrightarrow H \longrightarrow 0$$

рассмотрите весовую фильтрация на $\widetilde{H}$.)

Упражнение 2.7. Расширения $\mathbb{Q}(-n)_H$ при помощи $\mathbb{Q}(0)_H$

(i) Докажите, что для любого $n \geqslant 1$ имеется канонический изоморфизм $\mathrm{Ext}^1\big(\mathbb{Q}(-n)_H, \mathbb{Q}(0)_H\big) \simeq \mathbb{C}^* \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q}$, заданный следующим образом. Для смешанной структуры Ходжа H, являющейся расширением $\mathbb{Q}(-n)_H$ при помощи $\mathbb{Q}(0)_H$, выберем базис e_0, e_1 в H над $\mathbb{Q}$ так, что $\mathbb{Q} \cdot e_0 = W_0 H$, и пусть $f \in F^n H_{\mathbb{C}}$ — любой ненулевой элемент. Тогда класс H соответствует числу $\exp\big(2\pi i\, \langle e_0^\vee, f\rangle / \langle e_1^\vee, f\rangle\big)$, где $(e_0^\vee, e_1^\vee)$ — двойственный базис в $H^\vee$, т.е. $\mathbb{Q} \cdot e_1^\vee = W_0 H^\perp$. (Указание: расширение структур Ходжа, заданное H, однозначно определяется одномерным подпространством $F^n H_{\mathbb{C}} \subset H_{\mathbb{C}}$, изоморфно отображающимся в фактор $H_{\mathbb{C}}/W_0 H_{\mathbb{C}}$.)

(ii) Убедитесь, что для категории MH(k) смешанных структур Ходжа над k подобное рассуждение дает такой же ответ, т.е что $\mathrm{Ext}^1_{\mathrm{MH}(k)}\big(\mathbb{Q}(-n)_H, \mathbb{Q}(0)_H\big) \simeq \mathbb{C}^* \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q}$. (Указание: заметьте, что $W_0 H_{dR} = W_0 H_B$, так как $W_0 H \simeq \mathbb{Q}(0)_H$ для любой смешанной структуры Ходжа H над k, являющейся расширением $\mathbb{Q}(-n)_H$ при помощи $\mathbb{Q}(0)_H$.)

(iii) Покажите, что при изоморфизме из пункта (i) класс элемента $a \in \mathbb{C}^*$, $a \neq 1$, соответствует расширению, приходящему из длинной точной последовательности, связанной с относительными когомологиями:

$$0 \longrightarrow H^0(\{1, a\})/\mathbb{Q}(0)_H \longrightarrow H^1(\mathbb{G}_m, \{1, a\}) \longrightarrow H^1(\mathbb{G}_m) \longrightarrow 0\,.$$

(Указание: воспользуйтесь пунктом (i), выбрав подходящий базис в группе относительных гомологий $H_1(\mathbb{G}_m, \{1, a\}) = H^1(\mathbb{G}_m, \{1, a\})^\vee$, а также подходящую 1-форму в $F^1 H^1(\mathbb{G}_m, \{1, a\}) = F^1 H^1(\mathbb{G}_m)$.)

Упражнение 2.8. Смешанная структура Ходжа на $\pi_1(\mathbb{G}_m)$

Докажите, что для любого элемента $a \in \mathbb{Q}^* = \mathbb{G}_m(\mathbb{Q})$ имеется канонический изоморфизм $\mathcal{O}\big(\pi_1(\mathbb{G}_m; a)_H\big) \simeq T\big(\mathbb{Q}(-1)_H\big)$ коммутативных алгебр Хопфа в MH($\mathbb{Q}$). Соответствующую коммутативную алгебраическую группу в MH(k) будем обозначать для простоты через $\mathbb{Q}(1)_H$. (Указание: напомним, что $\mathcal{O}\big(\pi_1(\mathbb{G}_m; a)_{dR}\big) = T(\Omega)$ с определенными явным образом весовой фильтрацией и фильтрацией Ходжа, где $\Omega = \mathbb{Q} \cdot \omega$, $\omega = \frac{dz}{z}$. Поэтому инд-смешанная структура Ходжа $\mathcal{O}\big(\pi_1(\mathbb{G}_m; a)_H\big)$ над $\mathbb{Q}$ однозначно определяется $\mathbb{Q}$-векторным подпространством $\mathcal{O}\big(\pi_1(\mathbb{G}_m; a)_B\big) = \mathcal{O}\big(\pi_1(\mathbb{G}_m, a)^{un}_{\mathbb{Q}}\big) \simeq T(V)$ в $\mathbb{C} \otimes_{\mathbb{Q}} T(\Omega)$, где $V = U^\vee$, $U = \mathbb{Q} \cdot \gamma$, а γ — порождающая группы $\pi_1(\mathbb{G}_m, a)$. Равносильно, $\mathcal{O}\big(\pi_1(\mathbb{G}_m; a)_H\big)$ определяется $\mathbb{Q}$-билинейным спариванием

$$\langle \cdot, \cdot \rangle \;:\; T(\Omega) \times T^{\Pi}(U) \longrightarrow \mathbb{C}\,,$$

задающимся соответствующей матрицей периодов. В свою очередь, данное спаривание однозначно определяется тем, что $\langle\, \omega^{\otimes n}, \exp(\gamma)\,\rangle = \int_\gamma \omega^{\otimes n}$. Наконец, воспользуйтесь свойством итерированных интегралов $\int_\gamma \omega^{\otimes n} = \frac{1}{n!}(\int_\gamma \omega)^n$, $n \geqslant 0$.)

Упражнение 2.9. Расширения в малых весах для смешанной структуры Ходжа на $\pi_1(\mathbb{P}^1 \smallsetminus \{0,1,\infty\})$

Положим $X = \mathbb{P}^1 \smallsetminus \{0,1,\infty\}$ и пусть $a \in \mathbb{Q}$, $a \neq 0, 1$. Выберем непересекающиеся параллельные лучи r_0 и r_1 с центрами в 0, 1, внутренность которых не содержащит $0, 1, a$. Пусть γ_0 — петля с центром в a, обходящая против часовой стрелки точку 0 и лежащая в $\mathbb{C} \smallsetminus r_1$. Аналогично определим γ_1, но с обходом вокруг точки 1 по часовой стрелке. Данные петли задают отождествление $\pi_1(X;a)^{un}$ с $\mathrm{Spec}\big(T(V)\big)$, где $V = \langle e_0, e_1\rangle_{\mathbb{Q}}$, при котором γ_i переходит в $\exp(e_i^\vee)$. Положим $\omega_0 = \frac{dz}{z}$, $\omega_1 = \frac{dz}{1-z}$, и $\Omega = \langle \omega_0, \omega_1\rangle_{\mathbb{Q}}$. Тогда в

$$W_2\mathcal{O}\big(\pi_1(X;a)_B\big) = N_2T(V) = \mathbb{Q} \oplus V \oplus V^{\otimes 2}$$

имеется базис $1, e_0, e_1, e_0\otimes e_0, e_0 \otimes e_1, e_1 \otimes e_0, e_1 \otimes e_1$, а в

$$W_2\mathcal{O}\big(\pi_1(X;a)_{dR}\big) = N_2T(\Omega) = \mathbb{Q} \oplus \Omega \oplus \Omega^{\otimes 2}$$

имеется базис $1, \omega_0, \omega_1, \omega_0 \otimes \omega_0, \omega_0 \otimes \omega_1, \omega_1 \otimes \omega_0, \omega_1 \otimes \omega_1$. Проверьте, что относительно данных базисов матрица периодов смешанной структуры Ходжа $W_2\mathcal{O}\big(\pi_1(X;a)_H\big)$ над $\mathbb{Q}$ равна

$$\begin{pmatrix}
1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\
0 & 2\pi i & 0 & 0 & 2\pi i\log(1-a) & -2\pi i \log(1-a) & 0\\
0 & 0 & 2\pi i & 0 & -2\pi i \log(a) & 2\pi i \log(a) & 0\\
0 & 0 & 0 & (2\pi i)^2 & 0 & 0 & 0\\
0 & 0 & 0 & 0 & (2\pi i)^2 & 0 & 0\\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & (2\pi i)^2 & 0\\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & (2\pi i)^2
\end{pmatrix}$$

где $\log(z)$ и $\log(1-z)$ рассматриваются как однозначно определенные функции на $\mathbb{C} \smallsetminus r_0$ и $\mathbb{C} \smallsetminus r_1$, соответственно. (Указание: воспользуйтесь тем, что матрица периодов задается спариванием

$$\langle \cdot, \cdot \rangle \; : \; N_2T(\Omega) \times N_2T(U) \longrightarrow \mathbb{C}\,,$$

где $U = V^\vee = \mathbb{Q}\cdot e_0^\vee \oplus \mathbb{Q} \cdot e_1^\vee$. При этом данное спаривание однозначно задается условиями

$$\langle\, \omega_i, \exp(e_r^\vee)\,\rangle = \int_{\gamma_r} \omega_i\,, \qquad \langle\, \omega_i \otimes \omega_j, \exp(e_r^\vee)\,\rangle = \int_{\gamma_r} \omega_i \otimes \omega_j\,,$$

где $i, j, r = 0, 1$.)

Упражнение 2.10. Итерированные интегралы по касательным путям

Пусть $D \subset \mathbb{P}^1$ — приведенный эффективный дивизор над k, и пусть $x, y \in D(k)$, $u \in T_x\mathbb{P}^1$, $v \in T_y\mathbb{P}^1$. Докажите, что для любого касательного пути γ из u в v и для любых $\omega_1, \dots, \omega_n \in \Omega = H^0\big(\mathbb{P}^1, \Omega_{\mathbb{P}^1}(D)\big)$ выполняется равенство

$$\int_\gamma \omega_1 \dots \omega_n = \lim_{\varepsilon \to 0} \sum_{0 \leqslant i \leqslant j \leqslant n} \frac{(-1)^i}{i!(n-j)!} \prod_{l=1}^{i} \mathrm{res}_y(\omega_l) \cdot \int_{\gamma_\varepsilon} \omega_{i+1} \dots \omega_j \cdot \prod_{l=j+1}^{n} \mathrm{res}_x(\omega_l) \cdot \log(\varepsilon)^{i+n-j}.$$

(Указание: по определению итерированных интегралов по касательным путям данный интеграл равен верхнему правому элементу в матрице $\int_\gamma \nabla$, где $\nabla = d - N$ является плоской связностью в тривиальном расслоении, причем

$$N = \begin{pmatrix} 0 & \omega_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \omega_2 & \dots & 0 \\ & \vdots & & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \omega_n \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}. \tag{1}$$

Также воспользуйтесь определением $\int_\gamma \nabla$ для касательного пути γ и тем, что для обычного пути γ_ε имеем $\int_{\gamma_\varepsilon} \nabla = \int_{\gamma_\varepsilon} \big(1 + N + N^{\otimes 2} + N^{\otimes 3} + \dots\big)$.)

Упражнение 2.11. Морфизм $\mathbb{Q}(1)_H \to \pi(X, u)_H$

В обозначениях из упражнения 2.10 пусть γ_x обозначает маленькую касательную петлю в u, обходящую точку x против часовой стрелки.

(i) Покажите, что для любого расслоения с плоской связностью (E, ∇) с регулярной особенностью в x выполняется равенство $\int_{\gamma_x} \nabla = \exp\big(2\pi i \cdot \mathrm{res}_x(\nabla)\big)$. (Указание: воспользуйтесь тем, что можно считать $\nabla = d - R\frac{dz}{z}$, где $R \in \mathrm{Mat}_n(\mathbb{C})$, а также тем, что можно считать, что путь γ_x сначала идет вдоль маленького интервала из x, потом делает полный обход вокруг x, а потом возвращается вдоль того же интервала назад в x. При этом фундаментальной матрицей решений для $d - \nabla$ является $z^R = e^{R \log(z)}$.)

(ii) Докажите, что петля γ_x задает морфизм $\mathbb{Q}(1)_H \to \pi_1(X;u)_H$ проунипотентных групп в $\mathrm{MH}(k)$ (см. определение группы $\mathbb{Q}(1)_H$ в упражнении 2.8), для которого реализация Бетти является морфизмом $\mathbb{Z}^{un} \to \pi_1(X;u)^{un}$, $1 \mapsto \gamma_x$, а реализация де Рама соответствует морфизму алгебр Хопфа $T(\Omega) \to T(k)$, индуцированным $\mathrm{res}_x \colon \Omega \to k$. (Указание: надо проверить, что приведенные отображения для реализаций Бетти и де Рама согласованы посредством изоморфизмов сравнения в $T\big(\mathbb{Q}(-1)_H\big)$ и $\mathcal{O}\big(\pi_1(X;u)_H\big)$. Далее, сведите данный вопрос к тому, что для любых $\omega_1, \dots, \omega_n \in \Omega$ выполняется равенство

$$\int_{\gamma_x} \omega_1 \dots \omega_n = \frac{(2\pi i)^n}{n!} \mathrm{res}_x(\omega_1) \dots \mathrm{res}_x(\omega_n)\,.$$

Последнее можно проверить, применив пункт (i) к $\nabla = d - N$, где N как в формуле (1).)