Независимый Московский Университет, весна 2020

ПЕРЕСЕЧЕНИЯ В ПРОСТРАНСТВАХ МОДУЛЕЙ КРИВЫХ

Лекция 3 (была бы прочитана в марте, если бы не коронавирус): Пространство модулей кривых как множество

В этой лекции мы свяжем абстрактные и проективные кривые, дадим окончательное определение рода (в нескольких вариантах) и подготовим почву для описания пространств модулей кривых небольших родов.

3.0. Погружения абстрактных кривых **1**
...3.0.0. Между $\Bbbk$ и $\mathcal{K}$ **1**
...3.0.1. Пространства Римана-Роха **1**
...3.0.2. Дивизоры и отображения в проективные пространства **2**
...3.0.3. Линейная эквивалентность дивизоров **3**
3.1. Род (равносильные определения) **3**
...3.1.0. Топологическое определение **3**
...3.1.1. Определение через пространство голоморфных форм **3**
...3.1.2. Определение через дифференцирования **4**
...3.1.3. Определение через дифференциалы **4**
...3.1.4. Определение через группу Пикара **4**
...3.1.5. Когомологическое определение **4**
...3.1.6. Обсуждение **5**
3.2. Теорема Римана-Роха (предварительно)..

3.0. Погружения абстрактных кривых

3.0.0. Между $\Bbbk$ и $\mathcal{K}$. Напомним, что, несмотря на использование одной и той же буквы, рассматриваемые поля $\Bbbk \subset \mathcal{K}$ имеют принципиально разный статус: поле констант $\Bbbk$ фиксировано на всё время курса, тогда как функциональные поля $\mathcal{K}$ варьируются – и, собственно говоря, их вариации и составляют предмет курса.

Хотя рассматриваемые объекты принадлежат одной и той же категории,

$$\Bbbk, \mathcal{K} \in\in \mathcal{FLD},$$

рассматривать промежуточные поля мы не будем: в силу алгебраической замкнутости поля все они – тоже функциональные поля, а мы сейчас сосредотачиваемся лишь на одном таком. Вместо этого мы рассмотрим *промежуточные векторные пространства*, ограничившись *конечномерными*, и введём соответствующее множество[1]

$$\Bbbk\text{-}\mathbf{VECT}_{\subset\mathcal{K}} := \{V \subset \mathcal{K} \mid \big[V + V \subseteq V\big] \wedge \big[\Bbbk V \subseteq V\big] \wedge \big[\dim_{\Bbbk} V < \infty\big]\}.$$

3.0.1. Пространства Римана-Роха. Для дивизора $D \in \mathrm{Div}(\mathbf{X})$ введём множества

$$\mathrm{L}(D) := \{r \in \mathcal{K} \mid \mathrm{div}(r) + D \geq 0\}.$$

[1] обозначение не общепринято

Неформально такое множество следует понимать как множество рациональных функций с полюсами "не хуже D" – прибавление D "забивает" полюса.

Модельный пример: $\mathbf{X} = \mathbf{P}_1(\Bbbk), D = n\underline{\infty}$. Как нетрудно понять, $\mathrm{L}(D) = \Bbbk[x]_{\leq n}$ – множество многочленов степени, не превосходящей n; это – конечномерное векторное пространство над $\Bbbk$ содержащееся в $\Bbbk(x)$, то есть

$$\mathrm{L}(n\underline{\infty}) \in \Bbbk\text{-}\mathbf{VECT}_{\subset \Bbbk(x)}.$$

В общем случае также верно

$$\forall D \in \mathrm{Div}(\mathbf{X});\ \mathrm{L}(D) \in \Bbbk\text{-}\mathbf{VECT}_{\subset \mathcal{K}}.$$

Очевидно, что все множества $\mathrm{L}(D)$ – векторные пространства между $\Bbbk$ и $\mathcal{K}$; они и называются *пространствами Римана-Роха.*

Конечномерность пространств Римана-Роха не вполне очевидна; она является очень частным случаем классической работы [**Serre1955**]. В дальнейшем мы не только установим эту конечномерность, но и вычислим размерности

$$\ell(D) := \dim_{\Bbbk} \mathrm{L}(D),$$

решив тем самым для каждого дивизора $D \in \mathrm{Div}(\mathbf{X})$ так называемую *задачу Римана-Роха.*

Утверждение. *Любое промежуточное пространство лежит в некотором пространстве Римана-Роха,*

$$\forall V \in \Bbbk\text{-}\mathbf{VECT}_{\subset \mathcal{K}}\ \ \exists D \in \mathrm{Div}(\mathbf{X})\ \Big[V \subseteq \mathrm{L}(D)\Big].$$

Доказательство. Пусть $V = \langle r_1, \ldots, r_n\rangle$. Тогда, поскольку для любого $P \in \mathbf{X}$ и для любых $\lambda_1, \ldots, \lambda_n \in \Bbbk$

$$\mathrm{ord}_P(\lambda_1 r_1 + \ldots \lambda_n r_n) \geq \min\{\mathrm{ord}_P(r_1), \ldots, \mathrm{ord}_P(r_n)\},$$

то если положить

$$D_V := -\max\Big\{\big(\mathrm{div}(r_1)\big)_-, \ldots, \big(\mathrm{div}(r_1)\big)_-\Big\},$$

получим для любого $r \in V$ неравенство $\mathrm{div}(r) + D_V \geq 0$, то есть $V \subseteq \mathrm{L}(D)$.■

3.0.2. Дивизоры и отображения в проективные пространства. В теории гладких (не алгебраических, а "обычных" вещественных) многообразий важную роль сыграли *теоремы Уитни* [**Whitney1936**], согласно которым любое n-мерное компактное многообразие может быть погружено в $\mathbb{R}^{2n}$ и вложено в $\mathbb{R}^{2n+1}$. Они показали, что, отойдя от представлений о гладких многообразиях как о подмножествах $\mathbf{M} \subset \mathbb{R}^N$ (распространённых во времена Пуанкаре) и перейдя к множествам с внутренней структурой – *пучком* гладких функций $\mathcal{C}^\infty_{\mathbf{M}}$ – человечество не расширило класс объектов, а лишь приобрело более естественный взгляд на уже известные объекты. Сами отображения $\vec{x} : \mathbf{M} \to \mathbb{R}^N$ строились с помощью подбора подходящих координатных функций $x_i : \mathbf{M} \to \mathbb{R}$, определяемых внутренними средствами.

В нашем курсе основной точкой зрения является инвариантная, в выработанных обозначениях "кривая" $\mathbf{X} = \mathrm{val}_{\Bbbk}(\mathcal{K})$ никуда не вложена. Однако прямая аналогия с техникой Уитни невозможна: непостоянные функции $x_i : \mathbf{X} \dashrightarrow \Bbbk$ обязательно имели бы полюса, и все отображения $\vec{x} : \mathbf{X} \dashrightarrow \Bbbk^N$ определены лишь вне конечных множеств точек.

Однако этот подход работает, если заменить аффинные пространства на проективные. Любое ненулевое пространство $V \in \Bbbk\text{-}\mathbf{VECT}_{\subset\mathcal{K}}$ определяет при выборе произвольного базиса $V = \langle x_0, \dots, x_n \rangle$ отображение

$$\mathbf{X} \longrightarrow \mathbf{P}_n(\Bbbk) : P \mapsto \big(x_0(P) : \dots : x_n(P)\big);$$

полюса функций $x_0, \dots, x_n$ не страшны, поскольку в любой точке все функции можно умножить на подходящую степень локального параметра.

Очевидно, при смене базиса образ кривой в $\mathbf{P}_n(\Bbbk)$ претерпевает проективные преобразования.

Обычно рассматриваются отображения, определённые пространствами Римана-Роха $\mathrm{L}(D) \in \Bbbk\text{-}\mathbf{VECT}_{\subset\mathcal{K}}$. Согласно утверждению из раздела 3.0.1, все остальные отображения получаются композициями проекций

$$\mathbf{P}_m(\Bbbk) \dashrightarrow \mathbf{P}_{m-1}(\Bbbk) : (x_0 : \dots : x_{m-1} : x_m) \mapsto (x_0 : \dots : x_{m-1}).$$

Таким образом, каждой кривой присуще некоторое множество отображений в проективные пространства. Среди этих отображений есть вложения, и этот факт является аналогом вышеупомянутых теорем Уитни.

Пространства Римана-Роха осуществляют связь между абстрактными и проективными кривыми.

3.0.3. Линейная эквивалентность дивизоров. Линейно эквивалентные дивизоры определяют изоморфные пространства Римана-Роха: очевидно, если $D' = D + \mathrm{div}(r)$, то имеется изоморфизм

$$\mathrm{L}(D) \longrightarrow \mathrm{L}(D') : x \mapsto \frac{x}{r}$$

$$\mathrm{div}(x) + D \geq 0 \Longleftrightarrow \mathrm{div}(\tfrac{x}{r}) + D' \geq 0$$

Поэтому проективные вложения кривой $\mathbf{X}$ классифицируются не (необозримой) группой дивизоров $\mathrm{Div}(\mathbf{X})$, а её конечномерным фактором

$$\mathrm{Pic}(\mathbf{X}) := \frac{\mathrm{Div}(\mathbf{X})}{\mathrm{div}\big(\Bbbk(\mathbf{X})^\times\big)}.$$

3.1. Род (равносильные определения)

Как определяется род g кривой $\mathbf{X}$ над полем $\Bbbk$? Приведём несколько ответов.

3.1.0. Топологическое определение. Имеет смысл лишь над $\Bbbk = \mathbb{C}$. Неформально – количество *дырок*, или *ручек*. Формально – *половина 1-го числа Бетти*, или

$$\boxed{\mathrm{H}_1(\mathbf{X}, \mathbb{Z}) \simeq \mathbb{Z}^{2g}}$$

3.1.1. Определение через пространство голоморфных форм. Имеет смысл лишь над $\Bbbk = \mathbb{C}$. Использует *разложение Ходжа когомологий де Рама*

$$\mathrm{H}^1_{\mathrm{dR}}(\mathbf{X}, \mathbb{C}) = \mathrm{H}^{1,0}(\mathbf{X}) \oplus \mathrm{H}^{0,1}(\mathbf{X}).$$

"Половина" этих когомологий – пространство*голоморфных 1-форм*

$$\mathrm{H}^{1,0}(\mathbf{X}) \cong \{\text{голоморфные 1-формы на } \mathbf{X}.$$

Определение:

$$\boxed{\dim_{\mathbb{C}} \mathrm{H}^{1,0}(\mathbf{X}) = g}$$

3.1.2. Определение через дифференцирования. Нетрудно определить *дивизор ненулевого дифференцирования* и показать, что его степень зависит только от кривой (сразу следует из доказанного в предыдущей лекции утверждения о размерности $\dim_{\mathcal{K}} \mathrm{Diff}_{\Bbbk}(\mathcal{K}) = 1$).

Определение: $\forall \partial \in \mathrm{Diff}_{\Bbbk}(\mathcal{K}) \setminus \{0\}$;

$$\boxed{\deg\big(\mathrm{div}(\partial)\big) = 2 - 2g}$$

3.1.3. Определение через дифференциалы. Нетрудно определить *дивизор ненулевого дифференциала* и показать, что его степень зависит только от кривой (сразу следует из доказанного в предыдущей лекции утверждения о размерности $\dim_{\mathcal{K}} \Omega^1(\mathbf{X}) = 1$).

Определение: $\forall \omega \in \Omega^1(\mathbf{X}) \setminus \{0\}$;

$$\boxed{\deg\big(\mathrm{div}(\omega)\big) = 2g - 2}$$

$\Omega^1[\mathbf{X}] := \{\omega \in \Omega^1(\mathbf{X}) \mid \mathrm{div}(\omega) \geq 0\}$.

$$\boxed{\dim_{\Bbbk} \Omega^1[\mathbf{X}] = g}$$

3.1.4. Определение через группу Пикара. Введённая в предыдущей лекции группа $\mathrm{Pic}(\mathbf{X})$ определялась как абстрактная. В дальнейшем на ней будет введена структура: она окажется прямой суммой $\mathrm{Pic}(\mathbf{X}) \cong \mathrm{Pic}_0(\mathbf{X}) \oplus \mathbb{Z}$, где $\mathrm{Pic}_0(\mathbf{X})$ окажется конечномерным алгебраическим многообразием.

Определение:

$$\boxed{g = \dim_{\Bbbk} \mathrm{Pic}(\mathbf{X})}$$

3.1.5. Когомологическое определение. Через некоторое время мы освоив *когомологии когерентных пучков*. Тогда будет определён *структурный пучок* $\mathcal{O}$ и станет доступным, видимо, самое короткое определение

$$\boxed{g = \dim_{\Bbbk} \mathrm{H}^1(\mathbf{X}, \mathcal{O}^+)}$$

Оно распространяется и на особые кривые; допускает также другие, в том числе многомерные, обобщения.

3.1.6. Обсуждение. Определений приведено достаточно много, и понятны они (особенно начинающим) в разной степени.

Прежде чем представить педагогические обоснования этой не очень удобной методики, напомним глобальную роль рода в нашем курсе.

Множество $\mathcal{M}(\Bbbk)$ всех (классов изоморфности) кривых над полем $\Bbbk$ необозримо, и лишь разбиение этого множества по родам

$$\mathcal{M}(\Bbbk) = \coprod_{g=0}^{\infty} \mathcal{M}_g(\Bbbk)$$

сводит его к изучению конечномерных пространств модулей. Наш подход заключается в том, чтобы, предваряя общие определения, тщательно изучить (по возможности ВСЕ) кривые малых родов. Все приведённые определения будут при этом постепенно проясняться.

Уже сейчас определение 3.1.0 наглядно, а определение 3.1.2 формально понятно. Научившись распределять кривые по родам, мы будем следить за тем, как и все остальные определения будут терять загадочность.

3.2. Теорема Римана-Роха (предварительно)

Как было сказано, наша истинная цель при введении понятия рода – исследование кривых малых родов. Свойства этих кривых будут выводиться из *теоремы Римана-Роха*, которой будут посвящены ближайшие лекции.

Однако эта теорема может служить и ещё одним определением рода. А именно, для любого дивизора $D \in \mathrm{Div}(\mathbf{X})$ введём традиционные обозначения

$$d := \deg(D), \ell = \ell(D)$$

Тогда при $d >> 0$

$$\boxed{\ell = d - g + 1}$$

Приведённая форма удобна для запоминания; так, её частный случай – утверждение о размерности пространства многочленов ограниченной степени (достаточно положить $g = 0$). Но нашу предварительную формулировку можно и уточнить: $d >> 0$ означает $d \geq 2g - 1$.

Список литературы

[Serre1955] Jean-Pierre Serre, *Faisceaux Algébriques Cohérents.* Annals of Mathematics, Second Series, Vol. 61, No. 2 (Mar., 1955), pp. 197-278.

[Whitney1936] H. Whitney, *Differentiable manifolds.* Ann. of Math. (2) 37 (1936), no. 3, 645-680.