$G = \langle \gamma_1, \dots, \gamma_r \rangle$

$G^{un}_k = ?$ $\quad char(k) = 0$

$\mathcal{O}(G^{un}_k) = T(V) = \bigoplus_{n \geq 0} V^{\otimes n}$

$V = \langle e_1, \dots, e_r \rangle_k$

$G \longrightarrow Spec\, T(V)$

$\gamma_i \longmapsto T^{\Pi}(\mathcal{U}) = \prod_{n \geq 0} \mathcal{U}^{\otimes n}$

$V = \mathcal{U}^{v}$

$\gamma_i \longmapsto \exp(f_i) =$

$= 1 + f_i + \frac{f_i^{\otimes 2}}{2} + \frac{f_i^{\otimes 3}}{3!} + \dots$

$\begin{array}{cccc} \cap & \cap & \cap & \cap \\ k & \mathcal{U} & \mathcal{U}^{\otimes 2} & \mathcal{U}^{\otimes 3} \dots \end{array}$

$M \supset N$, M, N компл.

$$H^i(M) \to H^i(N)$$

$$H^{c+i}(M) \leftarrow H^i(N)$$

$c = \operatorname{codim}_M(N)$.

Напоминание

- M – гл. мн-ие

$\pi_1(M; a, b)^{un}_{\mathbb{Q}}$

группоид на M в проунип. алг. гр. $/\mathbb{Q}$

- $\mathcal{O}(\pi_1(M; a, b)^{un}_{\mathbb{Q}})$

$\mathbb{Q}$ – алгебра

$MH(k) \ni H = (H_B, H_{dR},$

$k \subset \mathbb{C}$ $\quad H_B \in Vect^f(\mathbb{Q})$, $H_{dR} \in Vect^f(k)$

$\mathrm{comp}: H_{dR} \otimes_k \mathbb{C} \xrightarrow{\sim} H_B \otimes_{\mathbb{Q}} \mathbb{C}$,

$F^{\cdot} H_{dR}$, $W_{\cdot} H_{dR})$ т.ч.

ф-ия X. вес. ф-ия

(i) $W_{\cdot}$ корр. опред. на H_B:

$\exists (!)$ $W_{\cdot} H_B$ т.ч.

$\mathrm{comp}(W_{\cdot} H_{dR} \otimes_k \mathbb{C}) = W_{\cdot} H_B \otimes_{\mathbb{Q}} \mathbb{C}$

(ii) $\forall n \in \mathbb{Z}$:

$\mathrm{comp}: gr^W_n H_{dR} \otimes_k \mathbb{C} \xrightarrow{\sim} gr^W_n H_B \otimes_{\mathbb{Q}} \mathbb{C}$

На ПЧ имеется компл.

сопрех. $v \otimes \lambda \mapsto v \otimes \bar{\lambda}$,

$v \in gr^W_n H_B$, $\lambda \in \mathbb{C}$,

оно задаёт

$\phi: gr^W_n H_{dR} \otimes_k \mathbb{C}$

$\mathbb{C}$-полулин. $(\phi(u\lambda) = \phi(u)\bar{\lambda})$

Усл-ие Ходжа: $\phi(F_{\mathbb{C}})$ расщ. $F_{\mathbb{C}}$, т.е.

$$\bigoplus_{p+q=n} (F^p gr^W_n H_{dR})_{\mathbb{C}} \cap \phi(F^q gr^W_n H_{dR})_{\mathbb{C}} \xrightarrow{\sim} (gr^W_n H_{dR})_{\mathbb{C}}.$$

$\mathrm{Ind}(MH/k) \ni (H_1 \hookrightarrow H_2 \hookrightarrow H_3 \hookrightarrow \ldots) \mapsto H$

$H_i \in MH/k$ ← $\otimes$ абел. к-ия

м.с., что $H_i \subset H$.
$\qquad\qquad\; \| $
$\qquad\qquad W_i H$

Теор. X/k гл., $a, b \in X(k)$

$\mathcal{O}(\pi_1(X(\mathbb{C}); a, b)^{un}_{\mathbb{Q}})$ достр-ся до групп. над $X(k)$ в проунипот. группах/аффин. мн-х в MH/k.

$\mathrm{Alg}(\mathrm{Ind}(MH/k))^{op}$

$\Downarrow$

$\pi_1(X; a, b)_H =$

$= (\mathcal{O}(\pi_1(X(\mathbb{C}), a, b)^{un}_{\mathbb{Q}}),$
$H^0(B(R\Gamma(X, \Omega^{\cdot}_X), a^*, b^*)),$
$F, W;$ comp $\leftrightarrow$ интегр. инт.$)$

<u>Утв.</u> Если $H^1(\bar{X})=0$, то

$W_\cdot = N_\cdot$ на $\mathcal{O}(\pi_1(X; a, b)_H)$,

причём $gr^W_\cdot \mathcal{O} \leftarrow T(H^1(X))$,

$H^1(X) = \mathbb{Q}_H(-1)^{\oplus r}$.

$$\mathbb{Q}_H(-1) = \left(\mathbb{Q}, k, \begin{matrix} W_1 = 0 \subset W_2 = k \\ F^1 = k \supset F^2 = 0 \end{matrix}\right)$$

<u>Сл-е</u> $\mathcal{O} \in Ind(MTH(k))$.

Явно $MTH(k)$:

$$\cdot\ gr^W_n = \begin{cases} \mathbb{Q}_H(-m)^{\oplus ?}, & n = 2m \\ 0, & n \text{ нечёт.} \end{cases}$$

<u>Замеч:</u> $H \in MTH(k)$
$= (H_B, H_{dR}, comp, F^\cdot, W_\cdot)$

<u>Упр.</u> $\bigoplus_{i\in\mathbb{Z}} F^i H_{dR} \cap W_i H_{dR} \xrightarrow{\sim} H_{dR}$

$W_{-1} = 0 \subset W_0 \subset W_1 \subset W_2 \subset \dots$

$gr^W_0 = \mathbb{Q}_H(0)^{\oplus ?}$

$W_0 \cap F^1 = 0$

$W_i \cap F^j = 0$ при $i < j$.

Поэтому, равносильно,

$$H = \Big(H_B,\ H_{dR} = \bigoplus_{i\in\mathbb{Z}} H_i,\ \mathrm{comp}\Big),$$

где $F^p H_{dR} = \bigoplus_{i\geq p} H_i$,

$$W_n H_{dR} = \bigoplus_{i\leq n} H_i .$$

$W_\cdot H_B$ выберем б.-с., согл. с фил., т.е.

$$H_B = \langle \ldots, \underbrace{e_{n1},\ldots, e_{n r_n}}_{gr^W_n}, \underbrace{e_{n+1,1},\ldots, e_{n+1,r_{n+1}}}_{gr^W_{n+1}} \ldots \rangle_{\mathbb{Q}}$$

$$\langle f_{n,1},\ldots, f_{n,r_n}\rangle_k = H_n$$

$$\mathrm{comp} : H_{dR}\otimes_k \mathbb{C} \xrightarrow{\sim} H_B\otimes_{\mathbb{Q}}\mathbb{C}$$

зд-ся м-цей

$G_n \in (2\pi i)^n \cdot GL_{r_n}(k) \subset GL_{r_n}(\mathbb{C})$

$\oint \frac{dz}{z} = 2\pi i$

G_n соотв. строго $H_i = 0$ при $i \neq n$,

т.е. $H = Q_H(-n)^{\oplus r_n}$

$$Q\gamma^\vee = \quad = k\frac{dz}{z}$$

$$Q_H(-1) = (Q, k, F, W, \ldots)$$

$$\text{comp}: \left(k \otimes_k \mathbb{C} \xrightarrow{\sim} Q \otimes_Q \mathbb{C},\quad 1 \mapsto 2\pi i \cdot 1 \right) = H^2(\mathbb{P}^1)$$

$$\| $$

$$H^1(G_m)$$

$$\frac{dz}{z} \in H^1_{dR}(G_m)$$

 γ

$$\gamma^\vee \in H^1_B(G_m(\mathbb{C}), \mathbb{Q}), \quad G_m(\mathbb{C}) = \mathbb{C}^\times$$

В естеств. б-се в

$$(Q_H(-n)^{\oplus r_n})_B = Q^{\oplus n}$$

$$(Q_H(-n)^{\oplus r_n})_{dR} = k^{\oplus n}$$

м-ца comp

$$\begin{pmatrix} (2\pi i)^n & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & (2\pi i)^n \end{pmatrix} = \tilde{G}_n$$

В произв. б-се comp зад-ся м-цей

$A \cdot \tilde{G}_n \cdot B$, $A \in GL_r(Q)$, $B \in GL_r(k)$

$$\|$$

$(2\pi i)^n \cdot A \cdot B$

На H_{dR} $W.$ расщ-се $F^{\cdot}$ когда $H \in MTM(k)$.

Сл-ие Если $H^1(\overline{X}) = 0$, то $\pi_1(X; a, b)_{dR}$ каноническ. трив., т.е. $\forall a, b, a', b' \in X(k)$ $\pi_1(X; a, b)_{dR} \cong \pi_1(X; a', b')_{dR}$.

$\pi_1(X, a, b)_{dR} = Spec(\mathcal{O}(\pi_1(X, a, b)_H)_{dR})$

$\pi_1(X; a, b)_{dR}(k) \ni can_{a,b}$:

$(gr_0^W)_{dR}$

$\mathcal{O}(\pi_1(X; a, b)_{dR}) \to k$

$\mathcal{O}(\pi_1(\ )_H)$

H_{dR}, где $H \in Ind(MTM(k))$

$gr^{W=N}_{\cdot} H \twoheadleftarrow T(\underbrace{H^1(X)}_{M}) = \mathbb{Q}_H^0(0) \oplus H^1(X)^{\oplus g} \oplus$

$\mathbb{Q}_H(-1)^{\oplus r}$ $\oplus H^1(X)^{\otimes 2}_4 \oplus \dots$

$\dots$

$$\boxed{gr^W_{\cdot} H_{dR} \cong H_{dR}}$$

$gr^N_{\cdot} H_{dR}$

Случай $X = \mathbb{P}^1 \setminus D$, $r = \# D(\mathbb{C})$.
$a, b \in X(k)$, D опр. $/k$.

$\mathcal{O}(\pi_1(X, a, b)_M) =$

$$= \Big(T(V),\ T(\Omega) \simeq \bigoplus_{i \geq 0} \Omega^{\otimes i},$$

comp задаётся м-цей т.ч.

$V = \langle e_1, \dots, e_{r-1} \rangle_{\mathbb{Q}} \simeq H^1(X, \mathbb{Q})$

$\Omega = H^0(\mathbb{P}^1, \Omega^1_{\mathbb{P}^1}(D))$

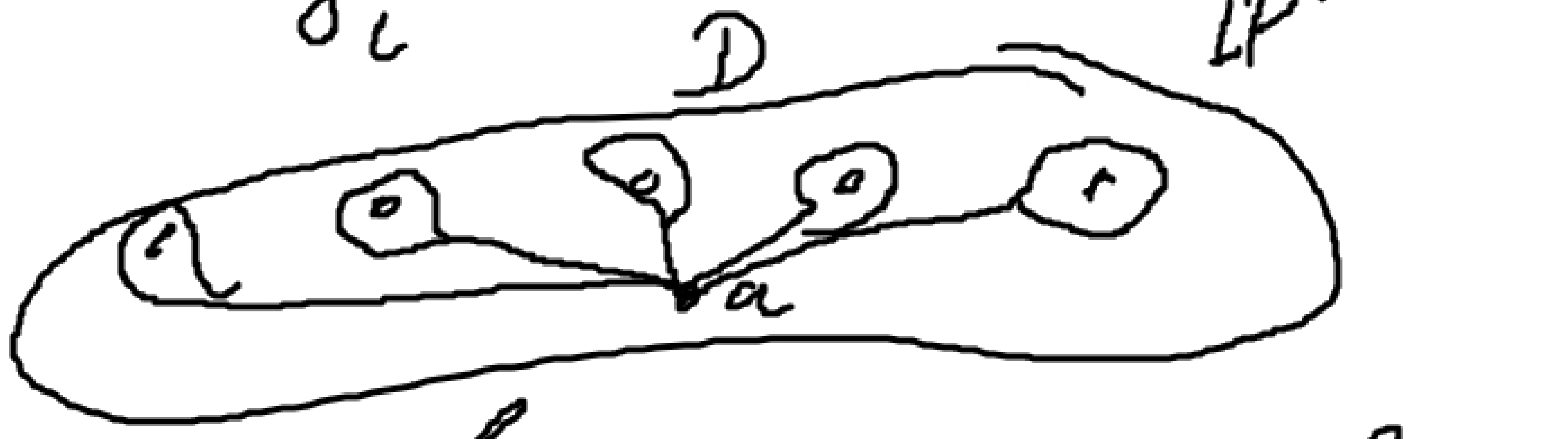
$\forall\ i = 1, \dots, r-1:$

$\langle \exp(f_i), \mathrm{comp}(w_1 \otimes \dots \otimes w_n) \rangle =$

$\langle f_1, \dots, f_{r-1} \rangle_{\mathbb{Q}} = V^\vee = U$

двойств. б-с

$= \int_{\gamma_i} w_1 \dots w_n$, где



$a = b$

Упр. Явно м-цу пер. вес $n \leq 2$.

$(\mathbb{Q}\otimes V\otimes V^{\otimes 2})\otimes_{\mathbb{Q}}\mathbb{C}$

$\uparrow$ comp

$(k\otimes\Omega\otimes\Omega^{\otimes 2})\otimes_k\mathbb{C}$

$q=6$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \boxed{\delta_{ii}} & \boxed{?} & \\ \vdots & & \boxed{(l_i^2)} & \\ \textcircled{1} & \bigcirc & & \end{pmatrix}$$

$\mathbb{Q}_H(-1)$

$\mathbb{Q}_H(-2)$

$(l_i,\ \omega) \longmapsto \delta_i$

$\omega = \mathrm{res}_{x_i}(\omega)$

$V^{\vee} \times \Omega \longrightarrow \mathbb{C}$ $\quad x_i \in D$

① Св-ти с регул. ос-ми

$\mathrm{char}(k)=0$

$X \subset \overline{X} \supset D$

гл. мн-ие $\quad$ гл. пр. $\quad$ SNCD

Опр Р-ие с гл. двойного с регул. ос-ми для $(\overline{X}, D)$ — это (E,∇), где E — вект. р-ие на $\overline{X}$, $\Omega^{\cdot}_{\overline{X}}\langle D\rangle$

$\nabla: E \to \Omega^1_{\overline{X}}\langle D\rangle\otimes E$, $\nabla^2=0$.

$E \to \Omega^2\langle D\rangle \otimes E$

<u>Замеч</u> $\left\{\begin{array}{l}\text{расслоения}\\ \text{со св-тью с}\\ \text{рег. ос-ми}\\ \text{на } (\bar X, D)\end{array}\right\} = \mathrm{Conn}^{reg}_{(\bar X, D)} \to$

$\to \mathrm{Conn}_{\bar X \setminus D = X} \to \mathrm{Conn}^{an}_{X \setminus D = X}$

$k = \mathbb{C}$

<u>Теор</u> (Делинь)

$$\mathrm{Conn}^{reg}_{(\bar X, D)} \xrightarrow{\sim} \mathrm{Conn}^{an}_X$$

эквив-ть к-гий

<u>Упр</u> $(E, \nabla) \in \mathrm{Conn}_{(\bar X, D)}$, D гладк.

$$\begin{tikzcd}
E \arrow[r, "\nabla"] \arrow[d] \arrow[dr, phantom, "\circlearrowleft"] & \Omega^1_{\bar X}\langle D\rangle \otimes_{\mathcal{O}_{\bar X}} E \arrow[d, "res"] \\
E|_D \arrow[r, "res_D(\nabla)"] & \mathcal{O}_D \otimes_{\mathcal{O}_{\bar X}} E = E|_D
\end{tikzcd}$$

$\mathcal{O}_D$-лин.

② Проколотый диск

$$\Delta = \{ z \in \mathbb{C} \mid |z| < 1 \}$$

$$\cup$$

$$\mathring{\Delta} = \Delta \setminus \{0\}$$

$\mathbb{C}$-лин. пр-ия

$$\mathrm{Conn}^{an}_{\mathring{\Delta}} \simeq \mathrm{Rep}(\pi_1(\mathring{\Delta}, a))$$

$$\left(\mathrm{Conn}_M \simeq \mathrm{Rep}(\pi_1(M,a)) \right)$$

$$(V \times \tilde{M}) / \pi_1(M,a) \longrightarrow M = \tilde{M} / \pi_1(M,a)$$

Пусть $\pi_1(\mathring{\Delta}, a) \longrightarrow GL_n(\mathbb{C})$

$$\psi \qquad\qquad\qquad \psi$$

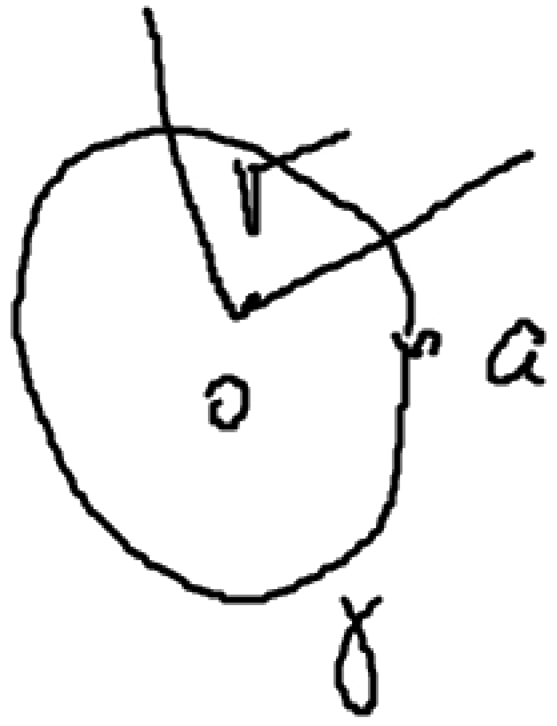
$$\longmapsto A$$

$$d - \frac{1}{2\pi i} \log(A) \frac{dz}{z} = \nabla$$

на $\mathcal{O}^{\oplus n}_{\Delta, an}$

$$\begin{pmatrix} \lambda & 1 & & 0 \\ & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & 1 \\ 0 & & & \lambda \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} \mu & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \mu \end{pmatrix}$$

$$\nabla = d - \underbrace{\frac{1}{2\pi i}\log(A)}\,\frac{dz}{z}$$



$$\int_\gamma \nabla = \,?\qquad R,\quad A \in GL_n(\mathbb{C})$$

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}' = \frac{R}{z}\begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix},$$ точнее

$G \in GL_n(\mathcal{O}_{an})$ т.ч.

$$G' = \frac{R}{z}\cdot G$$

$$G = e^{\int \frac{R}{z}dz} = e^{R\cdot \log z} = z^R$$

$$\int_\gamma \nabla = e^{-R\log z}\cdot e^{R(\log z + 2\pi i)} = e^{2\pi i R} = A \qquad \square$$

Значит $\mathrm{res}_0(\nabla) = -R$.

③ Касательные точки

$\gamma(0)=0$

$\gamma(1)=a$.

$$\nabla = d - \underbrace{\frac{1}{2\pi i}\log(A)}_{R}\frac{dz}{z}$$

$$\int_{\gamma|_{[\varepsilon,1]}} \nabla =$$

$$= \gamma(1)^{R}\cdot\gamma(\varepsilon)^{-R} =$$

$$= e^{R(\log a - \log\gamma(\varepsilon))} \xrightarrow[\varepsilon\to 0]{} \infty \;!$$

Лемма

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\int_{\gamma|_{[\varepsilon,1]}} \nabla \cdot \varepsilon^{-\operatorname{res}_0(\nabla)}$$ корр. опред.,

зав-т только от гом. класса

γ в секторе  с

фиксир $\gamma(1)=a$ и

$\gamma'(0)\in T_0\Delta$.

<u>Д-во</u>

$$\lim_{\varepsilon\to 0} e^{R(\log a - \log\gamma(\varepsilon))} \cdot e^{R\cdot\log\varepsilon} =$$

$$= \lim_{\varepsilon\to 0} e^{R\left(\log a - \log\frac{\gamma(\varepsilon)}{\varepsilon}\right)} =$$

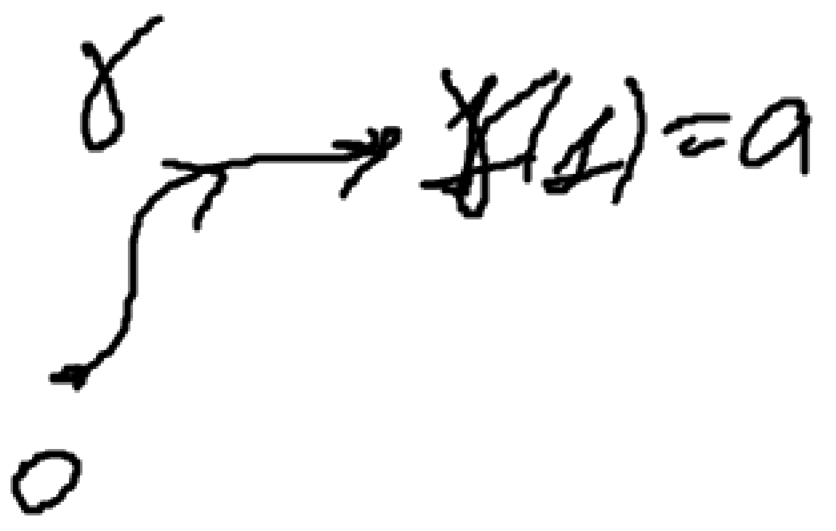
$$\lim_{\varepsilon\to 0}\frac{\gamma(\varepsilon)}{\varepsilon} = \gamma'(0) = u$$

$$\gamma(0)=0$$

$$= e^{R(\log a - \log u)} \quad \square$$

Пусть $(E,\nabla)\in \mathrm{Conn}_{\Delta,\{0\}}$

$\nabla: E\to \Omega^1_\Delta(0)\otimes_{\mathcal{O}_{\Delta,an}} E$. E на Δ.



Выберем $\lambda: E \xrightarrow{\sim} \mathcal{O}_{\Delta,an}^{\oplus n}$.

<u>Утв.</u> Предел

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\int_{\gamma(\varepsilon)}^{\gamma(1)} \nabla\cdot\varepsilon^{-\mathrm{res}_0(\nabla)} \in \mathrm{Isom}(E|_0, E|_a)$$

не зав-т от выбора λ.

Д-во λ' - другая тр-ия

$$\lambda' = G\cdot\lambda, \quad G\in GL_n(\mathcal{O}'_{\Delta,an}).$$

$$\int\limits_{\gamma(\varepsilon)}^{\gamma(1)} \nabla \circ \varepsilon^{-res_0(\nabla)}$$ меняется на

$$\underset{\substack{\| \\ \gamma(1)}}{G(a)}^{-1}\circ\int\limits_{\gamma(\varepsilon)}^{\gamma(1)}\nabla\circ G(\gamma(\varepsilon))\cdot G(0)^{-1}\,\varepsilon^{-res_0(\nabla)}\cdot G(0)$$

$$\lim_{\varepsilon\to 0} G(\gamma(\varepsilon))\cdot G(0)^{-1} = 1 \qquad \square$$

Замеч.

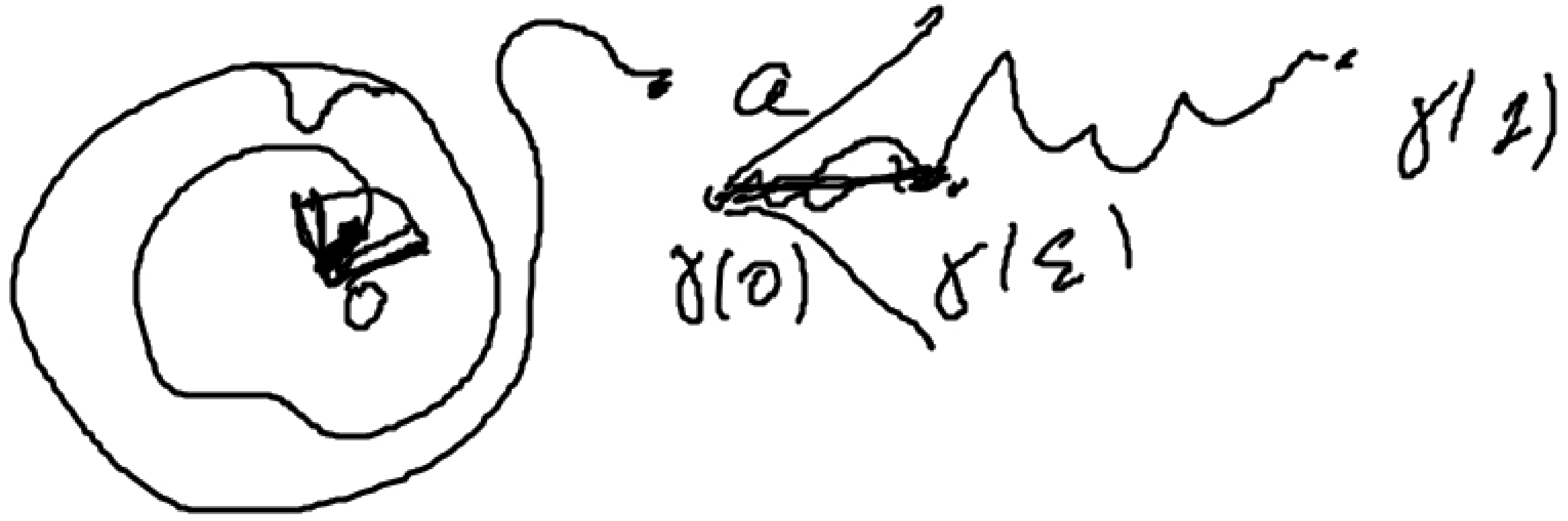
$$\lim_{\varepsilon\to 0}\ \dots =: \int\limits_{\gamma}\nabla$$ зав-т

от гом. класса

$\gamma: [0,1] \longrightarrow \mathring{\Delta}$ с

фикс $\gamma(0)=0$, $\gamma'(0)=u\in T_0\Delta$,

$\gamma(1)=a$.



Опр.

γ_x от 0 к 0

$u \in T_0\Delta$

Замеч

$$\int_{\gamma_x} \nabla = \lim_{\varepsilon \to 0} \varepsilon^{\mathrm{res}_0(\nabla)} \circ \int_{\gamma_\varepsilon} \nabla \circ \varepsilon^{-\mathrm{res}_0(\nabla)}$$

$$\gamma_\varepsilon := \gamma|_{[\varepsilon, 1-\varepsilon]}$$

Упр.

$$\int_{\gamma_x} \nabla = e^{2\pi i R} = A.$$

$$= e^{2\pi i\, \mathrm{res}_0(\nabla)}$$