Гомотопия и гомотопическая эквивалентность

Задача 5.1. а) Проверьте, что для гомотопических классов отображений $X \to Y$ и $Y \to Z$ класс их композиции корректно определен.

б) Проверьте, что гомотопическая эквивалентность является отношением эквивалентности.

Задача 5.2. Докажите, что несюръективное отображение пространства в S^n гомотопно постоянному.

▷ Напомним, что пространства X и Y называются гомотопически эквивалентными, если существуют такие (непрерывные) отображения $f\colon X \to Y$ и $g\colon Y \to X$, что отображения $g \circ f$ и $f \circ g$ гомотопны тождественным.

Задача 5.3. Постройте гомотопическую эквивалентность между а) $\mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\}$ и S^n; б) лентой Мёбиуса и окружностью; в*) $GL_n(\mathbb{R})$ и O_n.

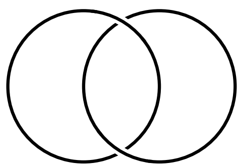
Задача 5.4. а) Покажите, что стягивание ребра графа, не являющегося петлей, является гомотопической эквивалентностью. (Для начала стоит построить (гомотопически) обратное отображение!)

б) Приведите пример топологического пространства X и такого стягиваемого подпространства $A \subset X$, что X и X/A гомотопически *не* эквивалентны.

Задача 5.5. Докажите, что сфера с двумя отождествленными точкам гомотопически эквивалентна а) объединению сферы с отрезком, соединяющим эти две точки; б) букету $S^2 \vee S^1$.

Задача 5.6. а) Докажите, что дополнение в S^3 к паре незацепленных окружностей гомотопически эквивалентно букету сфер (каких?).

б) Докажите, что дополнение в S^3 к зацеплению Хопфа (см. рис.) гомотопически эквивалентно тору.



Задача 5.7. Пусть $\mathbb{R}^\infty$ — множество финитных (обращающихся с какого-то момента в ноль) последовательностей вещественных чисел с евклидовой метрикой; $\mathbb{S}^\infty$ — сфера в этом пространстве (все точки на расстоянии 1 от нуля). Докажите, что сфера $\mathbb{S}^\infty$ стягиваема.

Задача 5.8. Пространства X и Y гомотопически эквивалентны тогда и только тогда, когда «при рассмотрении отображений с точностью до гомотопии они неотличимы»: для всех пространств S есть (естественный по S) изоморфизм $[S, X] \cong [S, Y]$.

Слова «естественный по S изоморфизм» означают, что для каждого пространства S задана такая биекция $\phi_S\colon [S, X] \to [S, Y]$, что для каждого отображения $S' \to S$ коммутативна диаграмма

$$\begin{array}{ccc} [S,X] & \xrightarrow{\phi_S} & [S,Y] \\ {\scriptstyle f^*}\downarrow & & {\scriptstyle f^*}\downarrow \\ [S',X] & \xrightarrow{\phi_{S'}} & [S',Y]. \end{array}$$