Фундаментальная группа

Задача 7.1. Докажите, что «обращение времени», сопоставляющее пути $\gamma\colon [0;1] \to X$ путь $\gamma'\colon t \mapsto \gamma(1-t)$ корректно определена на классах гомотопии петель и является взятием обратного в фундаментальной группе.

Задача 7.2. а) Найдите фундаментальную группу ленты Мёбиуса. б) Докажите, что не существует ретракции ленты Мёбиуса на ее граничную окружность.

▷ Пусть $X = U \cup V$, причем пространства $U, V, U \cap V$ линейно связны. Пусть еще либо U и V открыты, либо U и V — CW-подкомплексы CW-комплекса X. Тогда *теорема Зейферта — ван Кампена* утверждает, что $\pi_1(X) = \pi_1(U) *_{\pi_1(U\cap V)} \pi_1(V)$.
Здесь звездочка обозначает *амальгамированное произведение*. В частности, если $U \cap V$ односвязно, то $\pi_1(X)$ — *свободное произведение* $\pi_1(U)$ и $\pi_1(V)$. Если же V односвязно, то $\pi_1(X)$ получается из $\pi_1(U)$ факторизацией по нормальному замыканию образа $\pi_1(U \cap V) \to \pi_1(U)$.

Задача 7.3. Ограничения на U и V в теореме выше существенны: приведите пример таких линейно связных U и V, что $U \cap V$ стягиваемо, но $\pi_1(U \cup V) \ncong \pi_1(U) * \pi_1(V)$.

Задача 7.4. Найдите фундаментальную группу пространства а) $S^1 \vee S^1$; б) $S^1 \times S^1$.

Задача 7.5. а) Вычислите $\pi_1(S^n)$.
б) Докажите, что $\mathbb{R}^2$ и $\mathbb{R}^n$ при $n > 2$ не гомеоморфны (ср. с задачей 1.3в).

Задача 7.6. Докажите, что для CW-комплекса X с остовами $\mathrm{sk_n}\, X$ естественное отображение $\pi_1(\mathrm{sk_n}\, X) \to \pi_1(\mathrm{sk_{n+1}}\, X)$ биективно при $n > 1$ и сюръективно при $n = 1$.

Задача 7.7. Вычислите фундаментальную группу пространства а) $\mathbb{R}P^n$; б) $\mathbb{C}P^n$.

Задача 7.8. а) Докажите, что фундаментальная группа сферы с g ручками изоморфна группе с образующими $a_1, \dots, a_g$, $b_1, \dots, b_g$ и единственным соотношением

$$[a_1, b_1] \cdot \ldots \cdot [a_g, b_g] = 1,$$

где $[a, b] = aba^{-1}b^{-1}$.
б) Докажите, что для разных g сферы с g ручками не гомеоморфны и даже гомотопически не эквивалентны (указание: найдите фактор π_1 по коммутанту).

▷ Фундаментальной группой узла K называют группу $\pi_1(S^3 \setminus K) = \pi_1(\mathbb{R}^3 \setminus K)$.

Задача 7.9*. а) Докажите, что фундаментальная группа трилистника изомофрна группе с двумя образующими и одним соотношением $a^2 = b^3$.
б) Убедитесь в том, что фактор этой группы по коммутанту такой же как у фундаментальной групппы тривиального узла (ср. с задачей 5.6).
в) Докажите, что сами эти группы все же не изоморфны (указание: постройте сюръекцию фундаментальной группы трилистника на S_3) и, как следствие, трилистник невозможно развязать.