

*Задача 1.* Нарисовать на плоскости множества а)  $\arg(1-z) = \frac{3}{4}\pi$ ; б)  $\bar{z} = iz^2$ ; в)  $\bar{z} = iz$ ; г)  $|\frac{z-2i}{z+4}| \geq 1$ ; д)  $\operatorname{Re} z^2 > 1$ ; е)  $|z - 2i + 5| = 1$ ; ж)  $\operatorname{Re} z^2 > 1$ ; з)  $\operatorname{Im} z^2 > 1$ .

*Задача 2.* Нарисовать на плоскости множества и их образы при отображениях:

- а)  $\{z | \frac{\pi}{4} < \arg z \leq \pi, |z| \leq \frac{1}{2}\}$ ,  $\{z | \operatorname{Re} z = 1\}$ ,  $z \mapsto z^2$ ;  
 б)  $\{z | \operatorname{Im} z = 1\}$ ,  $\{z | \frac{\pi}{4} \leq \arg z \leq \frac{\pi}{2}, \operatorname{Im} z < 1\}$ ,  $z \mapsto \frac{1}{z}$ ;  
 в)  $\{z | \arg z = \frac{\pi}{4}\}$ ,  $\{z | 0 \leq \arg z \leq \pi, |z| < 1\}$ ,  $z \mapsto z + \frac{1}{z}$ .

*Задача 3.* Нарисовать на плоскости множества и их образы при отображениях:

- а)  $\{z | 0 < \operatorname{Im} z < 2\pi\}$ ,  $\{z | -\frac{\pi}{4} < \operatorname{Im} z \leq \frac{\pi}{2}, \operatorname{Re} z < 1\}$ ,  $z \mapsto e^z$ ;  
 б)  $\{z | \operatorname{Im} z = \frac{\pi}{6}\}$ ,  $\{z | \operatorname{Re} z = \frac{\pi}{6}\}$ ,  $z \mapsto \sin z$ .

*Задача 4.* В какие множества переводит отображение  $z \mapsto \frac{az+b}{cz+d}$  прямые и окружности?

*Задача 5.* Опишите все дробно-линейные отображения, переводящие открытый единичный круг, полуплоскость в себя?

*Задача 6.* В каких точках непрерывны (дифференцируемы) функции  $\operatorname{Re} z$ ,  $\bar{z}$ ,  $|z^2|$ ,  $\arg(z)$ .

*Задача 7.* Рассмотрим ряд  $\sum_{n \geq 0} a_n z^n$ , коэффициенты которого определены рекуррент-

ным соотношением:  $a_{n+2} = aa_{n+1} + ba_n$  ( $a, b \in \mathbb{R}$ ),  $a_0 = 0$ ,  $a_1 = 1$ .

- а) Докажите, что его радиус сходимости отличен от нуля.  
 б) Найдите сумму этого ряда.

*Задача 8.* Разложите функцию  $\frac{1}{1+ix}$  в степенной ряд с центром в точке  $a \in \mathbb{R}$ . Найдите радиус сходимости этого ряда.

*Задача 9.* Докажите, что  $e^z = 1 + z + \frac{z^2}{2!} + \frac{z^3}{3!} + \dots$

*Задача 10.* Докажите, что  $|e^z - 1| \leq e^{|z|} - 1 \leq |z|e^{|z|}$  при любом  $z$ .