НМУ, 2 курс, дифференциальная геометрия.
Повторный экзамен. 14.09.2021.

Экзамен будет домашним. Решения (не забудьте написать свою фамилию!) надо прислать лектору по электронной почте не позднее вечера понедельника 20 сентября. Большая просьба по возможности для перевода рукописных работ в файл использовать сканер, а не фотографировать на телефон, присылать один файл в формате pdf, а не кучу файлов в формате jpg, и писать ручкой, а не карандашом.

Большая просьба решать самостоятельно.

Пересчет баллов в оценки следующий: 50 баллов достаточно для «отлично», 40 для «хорошо», 30 для «удовлетворительно». Для того, чтобы экзамен был засчитан в НМУ, необходимо получить зачёт. Для получения зачёта надо решить в каждом из листков с задачами не менее трёх задач, но возможны ослабления этого критерия в зависимости от общей ситуации со сдачей задач.

Задача 1. Доказать тождество $[L_X, \iota_Y]\omega = \iota_{[X,Y]}\omega$ *(5 баллов).*

Задача 2. Рассмотрим распределение плоскостей в $\mathbb{R}^3$, заданное уравнением $dz = y\,dx$. Интегрируемо ли это это распределение? *(5 баллов).*

Задача 3. Пусть M_1 и M_2 римановы многообразия. На прямом произведении $M = M_1 \times M_2$ естественным образом вводится структура риманова многообразия, так как на касательном расслоении $TM = TM_1 \oplus TM_2$ естественно вводится евклидова метрика.

Пусть $p_i : M = M_1 \times M_2 \longrightarrow M_i$, $i = 1, 2$, естественные проекции. Чтобы упростить дальнейшие формулы, введём обозначение $X_i = dp_i(X) \in \Gamma(TM_i)$, где $X \in \Gamma(TM)$ векторное поле на M. Пусть R тензор Римана риманова многообразия M, а R^i тензор Римана римановых многообразий M_i, $i = 1, 2$.

Доказать, что $\langle R(X,Y)Z,W\rangle = \langle R^1(X_1,Y_1)Z_1,W_1\rangle + \langle R^2(X_2,Y_2)Z_2,W_2\rangle$. *(5 баллов).*

Задача 4. Пусть в условиях предыдущей задачи $\sigma \subset T_pM$, $p \in M$, такая 2-плоскость, что $\dim dp_i(\sigma) = 1$, $i = 1, 2$, то есть плоскость σ «натянута на вектор, касательный к M_1, и на вектор, касательный к M_2». Доказать, что тогда секционная кривизна в точке p в направлении σ равна нулю, $K_\sigma = 0$. *(5 баллов).*

Задача 5. Пусть M риманово многообразие, а ∇ — связность Леви-Чивиты. Определим гессиан гладкой функции формулой $\operatorname{Hess} f = \nabla df$. Ясно, что это билинейная форма. Докажите, что она симметрична и найдите выражение для $\operatorname{Hess} f(X,Y)$ в локальных координатах и в «безкоординатном» виде, то есть выразив через дифференциал и ковариантные производные. *(10 баллов).*

Задача 6. Доказать, что точки, сопряжённые данной точке на данной геодезической, являются изолированными. *(10 баллов).*

Задача 7. Докажите, что для многообразия положительной секционной кривизны $K \geqslant \mathrm{const} > 0$ существует такая постоянная T, что любая геодезическая, длина которой не меньше чем T, содержит пару точек, сопряжённых вдоль этой геодезической. *(10 баллов).*

Задача 8. Пусть ξ комплексное расслоение, $\operatorname{rk}\xi = k$, а $S^2\xi \subset \xi \otimes \xi$ его симметрический квадрат. Найдите $c_1(S^2\xi)$ *(10 баллов).*

Задача 9. Найдите класс Чженя касательного расслоения $T\mathbb{C}P^1$ и число Чженя

$$\langle c_1(T\mathbb{C}P^1), [\mathbb{C}P^1]\rangle := \int\limits_{\mathbb{C}P^1} c_1(T\mathbb{C}P^1).$$

Указание: $c_1(T\mathbb{C}P^1)$ *можно легко найти с помощью формулы, связывающей расслоение* $(\gamma^1)^*$*, двойственное к тавтологическому, и* $T\mathbb{C}P^1$*. (15 баллов).*

Задача 10*. С помощью характеристических классов докажите, что $\mathbb{CP}^2$ не может быть краем какого-либо многообразия *(20 баллов).*