НМУ, 2 курс, дифференциальная геометрия. Листок 4.
Плотности. Погружение, подмногообразие, вложение. 11.03.2021.

Задача 1. Рассмотрим сферу $\mathbb{S}^2$ единичного радиуса с индуцированной из евклидова пространства метрикой $g^{\mathbb{S}^2}$. Рассмотрим стандартную проекцию $p : \mathbb{S}^2 \longrightarrow \mathbb{RP}^2$. Доказать, что метрика $g^{\mathbb{S}^2}$ инвариантна относительно антиподального отображения сферы, а потому «спускается» на $\mathbb{RP}^2$, то есть на проективной плоскости существует такая метрика $g^{\mathbb{RP}^2}$, что $p^* g^{\mathbb{RP}^2} = g^{\mathbb{S}^2}$. Построить по этой метрике плотность объёма $dVol$ на проективной плоскости и найти площадь проективной плоскости

$$\mathrm{Vol}(\mathbb{RP}^2) = \int_{\mathbb{RP}^2} dVol.$$

Задача 2. Приведите пример подмножества $\mathbb{R}^1$, не являющегося подмногообразием $\mathbb{R}^1$. Аналогичный вопрос для $\mathbb{R}^2$.

Задача 3. Пусть M гладкое многообразие а A подмножество M. Фиксируем топологию на A. Доказать, что тогда на A существует не более одной дифференцируемой структуры, такой, что (A, i) — подмногообразие в M, где i — отображение вложения.

Задача 4. Пусть M многообразие, а $\iota : N \hookrightarrow M$ вложенное подмногообразие. Так как ι гомеоморфизм на образ, а $d_p\iota : T_pN \longrightarrow T_{\iota(p)}M$ мономорфизм, то мы обычно отождествляем p с $\iota(p)$, а $X \in T_pN$ с $d_p\iota(X) \in T_{\iota(p)}M$. Поэтому мы говорим, что вектор X в точке $q \in M$ касателен к N, подразумевая, что существует такой вектор $Y \in T_{\iota^{-1}(q)}N$, что $d_{\iota^{-1}(q)}(Y) = X$. Доказать, что коммутатор двух векторных полей на M, касательных к подмногообразию N, — тоже векторное поле, касательное к N.

Задача 5. Доказать, что открытая область U многообразия M является многообразием. Является ли естественное отображение $i : U \longrightarrow M$ погружением? Является ли (U, i) подмногообразием? Является ли U вложенным подмногообразием?

Задача 6. Пусть N — связное подмножество n-мерного многообразия M, обладающее таким свойством: у любой точки $A \in M$ существует такая окрестность U с локальными координатами $x^1, \dots, x^n$, что или $N \cap U = \varnothing$, или $N \cap U$ задаётся в U как решение системы гладких уравнений

$$\begin{cases} f_1(x^1, \dots, x^n) = 0, \\ \qquad \dots \\ f_{n-k}(x^1, \dots, x^n) = 0 \end{cases}$$

полного ранга, то есть $\mathrm{rk}\left(\frac{\partial f_i}{\partial x^j}\right) = n - k$. Доказать, что на N есть такая структура гладкого многообразия, что естественное отображение $i : N \longrightarrow M$ является вложением. Всякое ли вложенное подмногообразие может быть получено таким образом?

Задача 7. Рассмотрим $\mathbb{S}^1$ как единичную окружность в комплексной плоскости и тор $\mathbb{T}^2$ как $\mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^1$. Определим отображение $\varphi : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{T} = \mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^1$, полагая $\varphi(t) = (e^{2\pi i t}, e^{2\pi i \alpha t})$, где α — иррациональное число. Доказать, что φ — погружение $\mathbb{R}$ в $\mathbb{T}^2$ (оно называется плотной обмоткой тора). Является ли $(\mathbb{R}, \varphi)$ подмногообразием? Вложенным подмногообразием?

Задача 8. Рассмотрим распределение плоскостей в $\mathbb{R}^3$, заданное уравнением $dz = y dx$. Интегрируемо ли это это распределение?

Задача 9. Может ли гладкое отображение $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^1$ быть инъективным?

Задача 10. Пусть M — компактное многообразие размерности n. Рассмотрим гладкое отображение $f : M \longrightarrow \mathbb{R}^n$. Доказать, что f не может быть невырожденным в каждой точке.