НМУ, весенний семестр 2020/2021 учебного года
Курс «Флаги в бесконечномерных пространствах»

Листок 1. Флаги в конечномерных пространствах

1.1. Для произвольного целого положительного n обозначим через $[n]$ многочлен от переменной q с целыми коэффициентами вида $[n] = 1 + q + q^2 + \ldots + q^{n-1}$; назовём его *квантовым аналогом* числа n. (Обратите внимание, что $[n]! = n$ при $q = 1$.) Определим теперь квантовый факториал числа n как $[n]! = [1] \cdot [2] \cdot \ldots [n]$; пусть также $[0]! = 1$. Для целых неотрицательных $n \geqslant k$ *квантовым числом сочетаний из n по k* назовём рациональную функцию

$$\begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix} = \frac{[n]!}{[k]![n-k]!}.$$

а) Докажите квантовый аналог формулы треугольника Паскаля: при $1 \leqslant k \leqslant n-1$ верна формула

$$\begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} n-1 \\ k \end{bmatrix} + q^{n-k} \begin{bmatrix} n-1 \\ k-1 \end{bmatrix} = q^k \begin{bmatrix} n-1 \\ k \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} n-1 \\ k-1 \end{bmatrix}.$$

(Как следствие, квантовое число сочетаний на самом деле является многочленом от q с целыми коэффициентами.)

б) Определим n-ю квантовую степень как многочлен от переменных x, y, q с целыми коэффициентами вида

$$[x+y]^n = (x+y)(x+qy)(x+q^2y)\ldots(x+q^{n-1}y).$$

Докажите квантовый аналог бинома Ньютона:

$$[x+y]^n = \sum_{k=0}^{n} q^{k(k-1)/2} \begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix} x^{n-k} y^k.$$

1.2. а) Докажите, что количество базисов в n-мерном векторном пространстве над конечным полем $\mathbb{F}_q$ из q элементов равно

$$(q^n - 1)(q^n - q)(q^n - q^2)\ldots(q^n - q^{n-1}).$$

б) Покажите, что количество точек на грассманиане k-мерных подпространств в n-мерном пространстве над $\mathbb{F}_q$ равно $\begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}$.

в) Используя пункт (б), получите ещё раз квантовый аналог формулы треугольника Паскаля. (Указание: используйте аффинные подпространства.)

г) Используя пункт (б), докажите, что при $k \leqslant m$ верно тождество

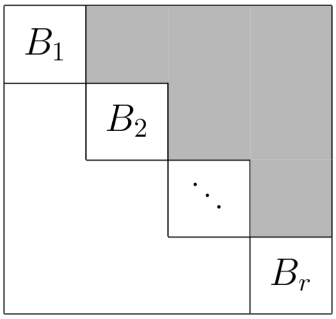
$$\sum_{i=0}^{k} q^{(m-i)(k-i)} \begin{bmatrix} n \\ k-i \end{bmatrix} \begin{bmatrix} m \\ i \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} m+n \\ k \end{bmatrix}.$$

1.3. Пусть целые положительные числа $l_1, \ldots, l_r, n$ таковы, что $l_1 + \ldots + l_r = n$. Назовём *квантовым мультиномиальным коэффициентом* рациональную функцию

$$\begin{bmatrix} n \\ l_1, \ldots, l_r \end{bmatrix} = \frac{[n]!}{[l_1]! \ldots [l_r]!}.$$

а) Проверьте, что это число равно количеству флагов типа $(l_1,\ l_1 + l_2,\ \ldots,\ l_1 + \ldots + l_{r-1})$ в n-мерном пространстве над $\mathbb{F}_q$. б) Покажите, что на самом деле эта рациональная функция является многочленом от q.

1.4. Матрица из группы $\mathrm{GL}_n(\mathbb{F})$ обратимых матриц размера $n \times n$ с коэффициентами из поля $\mathbb{F}$ называется *блочно-треугольной*, если она имеет вид



Здесь $B_1, \ \ldots, \ B_r$ — квадратные невырожденные матрицы размера $l_1 \times l_1, \ \ldots, \ l_r \times l_r$ соответственно ($l_1 + \ldots + l_r = n$), а на месте серых клеточек могут стоять любые числа из поля $\mathbb{F}$. Обозначим подгруппу в $\mathrm{GL}_n(\mathbb{F})$, состоящую из всех таких матриц (при фиксированных $l_1, \ \ldots, \ l_r$) через P; она называется *параболической* подгруппой.

а) Найдите $|P|$ при $\mathbb{F} = \mathbb{F}_q$. Выведите отсюда, что число левых смежных классов по P равно $\left[{n \atop l_1,\ldots,l_r}\right]$.

б) Получите результат о количестве левых смежных классов, используя трактовку P как стабилизатора координатного флага определённого типа.

1.5. *Проективной общей линейной группой* $\mathrm{PGL}_n(\mathbb{F}_q)$ называется факторгруппа группы $\mathrm{GL}_n(\mathbb{F}_q)$ по её центру. *Проективной специальной линейной группой* $\mathrm{PSL}_n(\mathbb{F}_q)$ называется образ $\mathrm{SL}_n(\mathbb{F}_q)$ в $\mathrm{PGL}_n(\mathbb{F}_q)$ при канонической проекции факторизации. Будем через S_n обозначать группу подстановок на n элементах, а через A_n — подгруппу чётных подстановок в ней.

а) Найдите порядки всех групп $\mathrm{GL}_n(\mathbb{F}_q)$, $\mathrm{SL}_n(\mathbb{F}_2)$, $\mathrm{PGL}_n(\mathbb{F}_q)$, $\mathrm{PSL}_n(\mathbb{F}_q)$.

б) Проверьте, что $\mathrm{GL}_2(\mathbb{F}_2) = \mathrm{SL}_2(\mathbb{F}_2) = \mathrm{PGL}_2(\mathbb{F}_2) = \mathrm{PSL}_2(\mathbb{F}_2) \cong S_3$.

в) Покажите, что $\mathrm{PGL}_2(\mathbb{F}_3) \cong S_4$, $\mathrm{PSL}_2(\mathbb{F}_3) \cong A_4$.

г) Докажите, что $\mathrm{PGL}_2(\mathbb{F}_4) = \mathrm{PSL}_2(\mathbb{F}_4) \cong A_5$.

1.6. Покажите, что $\mathrm{PGL}_2(\mathbb{F}_5) \cong S_5$, $\mathrm{PSL}_2(\mathbb{F}_5) \cong A_5$.

1.7. Докажите, что группа $\mathrm{PSL}_n(\mathbb{F}_q)$ проста при $n \geqslant 3$.