ЛЕКЦИЯ 3

Аннотация. Базы и предбазы. Индуктивная и проективная топология. Топология подмножества, фактор-топология и топология прямого произведения.

1. **Базы и предбазы топологии.** Иногда удобно задать вместо топологии некоторое определяющее ее подмножество. Так, пусть $\mathcal{B}$ — набор подмножеств множества X, обладающий такими свойствами:

(1) Если $B_1, B_2 \in \mathcal{B}$, то $B_1 \cap B_2$ является объединением (возможно, бесконечным) множеств $B \in \mathcal{B}$.
(2) X является объединением всех множеств $B \in \mathcal{B}$.

Такое $\mathcal{B}$ называется базой топологии. Всевозможные объединения элементов базы образуют топологию (проверьте!). Пример базы топологии — шары в метрическом пространстве. В любой топологии база не единственна: например, в том же метрическом пространстве все шары с радиусами, меньшими заранее заданного числа $\varepsilon > 0$, тоже образуют базу. Для любой топологии можно взять в качестве базы все открытые множества. Еще один пример: множества $U_1 \times \cdots \times U_n \subset \mathbb{R}^n$, где $U_1, \dots, U_n \subset \mathbb{R}$ — открытые подмножества (или элементы любой базы), образуют базу стандартной топологии в $\mathbb{R}^n$.

Как нетрудно проверить, отображение $f : X \to Y$, где X и Y — пространства с базами топологии $\mathcal{B}$ и $\mathcal{C}$, является непрерывным, если для всякого $C \in \mathcal{C}$ его прообраз $f^{-1}(C) \subset X$ — открытое множество, то есть объединение (возможно, бесконечное) каких-то множеств $B \in \mathcal{B}$.

Пусть теперь $\mathcal{P}$ — набор подмножеств множества X, объединение которых это все X. Тогда всевозможные конечные пересечения элементов множества $\mathcal{P}$ (включая просто элементы этого множества) образуют базу топологии на X (докажите!). Такое $\mathcal{P}$ называется предбазой топологии. Пример предбазы (стандартной топологии в $\mathbb{R}^n$) — множества вида $\mathbb{R} \times \cdots \times U \times \cdots \times \mathbb{R} \subset \mathbb{R}^n$, где $U \subset \mathbb{R}$ (стоящее на i-ом месте, $i = 1, \dots, n$) — открытое подмножество.

Отображение $f : X \to Y$ пространств, снабженных предбазами топологии $\mathcal{P}$ и $\mathcal{Q}$ соответственно, является непрерывным (в соответствующих топологиях), если для всякого $Q \in \mathcal{Q}$ его прообраз $f^{-1}(Q) \subset X$ — открытое множество, то есть объединение конечных пересечений множеств $P \in \mathcal{P}$.

2. **Общие конструкции топологических пространств.** Пусть Y — любое множество, $\{X_\alpha \mid \alpha \in A\}$ — произвольный набор топологических пространств, а $\{f_\alpha : Y \to X_\alpha \mid \alpha \in \mathcal{A}\}$ — произвольный набор отображений. Тогда в множестве Y можно ввести топологию, объявив ее предбазой все множества вида $f_\alpha^{-1}(U) \subset Y$, где $U \subset X_\alpha$ — любое открытое (в топологии X_α) множество. Это действительно предбаза, т.к. $Y = f_\alpha^{-1}(X_\alpha)$ для произвольного α. Тем самым базой топологии будут все множества (конечные пересечения) вида $f_{\alpha_1}^{-1}(U_1) \cap \cdots \cap f_{\alpha_N}^{-1}(U_N)$, где $\alpha_1, \dots, \alpha_N \in \mathcal{A}$ — произвольный конечный набор индексов, а $U_1 \subset X_{\alpha_1}, \dots, U_N \subset X_{\alpha_N}$ — произвольные открытые множества. Открытыми множествами в Y будут всевозможные объединения элементов базы. Построенную топологию назовем инъективной относительно отображений $\{f_\alpha \mid \alpha \in \mathcal{A}\}$ (это не общепринятый термин).

Теорема 1. *Все отображения $f_\alpha : Y \to X_\alpha$ непрерывны в инъективной топологии. Если на Y есть топология $\mathcal{T}$, относительно которой все f_α непрерывны, то она более тонкая, чем инъективная — любое множество, открытое в инъективной топологии, открыто также и в $\mathcal{T}$. Для всякого топологического пространства Z отображение $g : Z \to Y$ (где в Y — инъективная топология) непрерывно тогда и только тогда, когда непрерывны все композиции $f_\alpha \circ g : Z \to X_\alpha$.*

Доказательство. Доказательство всех утвержденрий теоремы — легкое упражнение; докажем для примера последнее утверждение (считая, что остальные уже доказаны). Из непрерывности f_α и непрерывности $g : Z \to Y$ сразу получаем, что композиции $f_\alpha \circ g : Z \to X_\alpha$ также непрерывны.

Предположим обратное: $f_\alpha \circ g : Z \to X_\alpha$ непрерывно при любом $\alpha \in \mathcal{A}$. Пусть $U \subset Y$ открыто; докажем, что $g^{-1}(U) \subset Z$ тоже открыто. Очевидно, это достаточно доказать в случае, когда U — элемент предбазы, то есть $U = f_\alpha^{-1}(V)$, где $V \subset X_\alpha$ открыто. Но тогда $g^{-1}(U) = (f_\alpha \circ g)^{-1}(V)$ открыто в силу непрерывности $f_\alpha \circ g$. $\square$

Вторая общая конструкция топологии в множестве Y в некотором смысле двойственна к первой: пусть имеются отображения $f_\alpha : X_\alpha \to Y$, $\alpha \in \mathcal{A}$. Назовем множество $U \subset Y$ открытым, если все прообразы $f_\alpha^{-1}(U) \subset X_\alpha$, $\alpha \in \mathcal{A}$, открыты (в топологии соответствующих пространств X_α). Нетрудно видеть, что это действительно топология; назовем ее проективной относительно отобаржений f_α (термин не общепринятый).

Теорема 2. *Все отображения $f_\alpha : X_\alpha \to Y$, где в Y — проективная топология, непрерывны. Если на Y есть топология $\mathcal{T}$, относительно которой все f_α непрерывны, то она более грубая, чем проективная — любое множество, открытое в $\mathcal{T}$, открыто также и в проективной топологии. Для всякого топологического пространства Z отображение $g : Y \to Z$ (где в Y — проективная топология) непрерывно тогда и только тогда, когда непрерывны все композиции $g \circ f_\alpha : X_\alpha \to Z$.*

Доказательство теоремы аналогично теореме 1.

Конструкции топологических пространств, приведенные в этом разделе, очень общие. Их конкретное геометрическое содержание зависит от отображений f_α; в следующих разделах мы приведем несколько примеров.

3. **Топология подмножества (она же индуцированная).** Пусть X — топологическое пространство, $Y \subset X$ — произвольное подмножество. Обозначим $\iota_{Y,X} : Y \to X$ тавтологическое вложение: $\iota_{Y,X}(y) = y$ для всякого $y \in Y$ (но слева y это элемент Y, а справа — элемент X!). Теперь в множестве Y можно ввести топологию, инъективную относительно (единственного) отображения $\iota_{Y,X}$; она называется индуцированной топологией в Y или топологией подмножества. Как нетрудно видеть, $\iota_{Y,X}^{-1}(V) = V \cap Y$ для произвольного подмножества $V \subset X$ — тем самым, подмножество $U \subset Y$ открыто в индуцированной топологии, если существует открытое подмножество $V \subset X$ такое, что $U = Y \cap V$. Согласно теореме 1, это — самая грубая топология в Y, относительно которой вложение непрерывно; отображение $g : Z \to Y$ непрерывно тогда и только тогда, когда непрерывна композиция $\iota_{Y,X} \circ g : Z \to X$ — то есть то же самое g, но рассматриваемое как отображение $Z \to X$ (для которого $g(Z) \subset Y$).

Замечание 1. Если топология в X хаусдорфова, то топология, индуцированная в $Y \subset X$, тоже хаусдорфова. Если топология в X порождена метрикой d, то индуцированная топология в $Y \subset X$ порождена ограничением той же метрики на Y (докажите!).

Конструкция индуцирования позволяет определить топологию сразу на большом количестве пространств — например, на произвольном подмножестве $Y \subset \mathbb{R}^n$. Если $h : X \to Z$ — непрерывное отображение, то композиция $h \circ \iota_{Y,X} : Y \to Z$, то есть ограничение h на Y, непрерывно. Однако это условие не является необходимым для непрерывности h — не любое непрерывное отображение $Y \to Z$ продолжается до непрерывного отображения $X \to Z$. Например, если $X = \mathbb{R}$, $Y = (-\pi/2, \pi/2)$, то отображение $\operatorname{tg} : Y \to \mathbb{R}$ непрерывного продолжения на всю прямую не имеет, поскольку $\lim_{t \to \pi/2-0} \operatorname{tg}(t) = +\infty$.

Пример 1. Пусть $S^1 = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| = 1\} \subset \mathbb{C} = \mathbb{R}^2$ — окружность единичного радиуса с центром в начале координат; наделим ее топологией как подмножество топологического (метрического) пространства $\mathbb{R}^2$. Обозначим $\iota : S^1 \to \mathbb{R}^2$ тавтологическое вложение; согласно теореме 1, оно непрерывно.

Пусть $n \in \mathbb{Z}$; рассмотрим отображение $f : S^1 \to S^1$, действующее по правилу $f(z) = z^n$. Обозначим $F : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ отображение, заданное такой же формулой. Из курса анализа известно, что F непрерывно. Отсюда следует, что композция $F \circ \iota : S^1 \to \mathbb{C}$, то есть ограничение $F|_{S^1} : S^1 \to \mathbb{C}$, непрерывно. Образ отображения $F \circ \iota$ лежит в $S^1 \subset \mathbb{C}$ (при $n \neq 0$ — совпадает с S^1), откуда вытекает, что $F \circ \iota = \iota \circ f$. Тем самым отображение $\iota \circ f$ непрерывно; согласно той же теореме 1, из этого вытекает непрерывность f.

Отображение f является локальным гомеоморфизмом: для каждой точки $a \in S^1$ существует открытое множество $U \subset S^1$, содержащее точку a и такое, что $f_U \stackrel{\text{def}}{=} f|_U : U \to f(U)$ — гомеоморфизм. В качестве U можно взять дугу без концов, длина которой меньше $1/n$ от длины окружности; это гарантирует, что f_U — биекция. Доказательство непрерывности f_U и f_U^{-1} — упражнение (например, можно доказать из метрических соображений или применить теорему о неявной функции).

Из локальной гомеомеорфности вытекает, что f — открытое отображение: для всякого открытого $V \subset S^1$ его образ $f(V) \subset S^1$ открыт. Действительно, покроем $S^1 = \bigcup_{i=1}^N U_i$, где каждая U_i — открытая дуга длиной меньше $1/n$. Тогда $V = \bigcup_{i=1}^N (V \cap U_i)$, и $f(V) = \bigcup_{i=1}^N f(V \cap U_i) = \bigcup_{i=1}^N f_{U_i}(V \cap U_i)$. Образ $f_{U_i}(V \cap U_i) = (f_{U_i}^{-1})^{-1}(V \cap U_i)$ открыт в силу непрерывности $f_{U_i}^{-1}$, откуда и вытекает, что $f(V)$ открыт.

4. **Фактор-топология.** Пусть на множестве X задано отношение эквивалентности $\sim$ (т.е. такое, что $x \sim x$, $x \sim y \Rightarrow y \sim x$ и $x \sim y \sim z \Rightarrow x \sim z$). Тогда X однозначно представляется (докажите!) в виде объединения непересекающихся множеств (*классов эквивалентности*): $X = \bigsqcup_{\alpha \in A} X_\alpha$, где $x \sim y$ тогда и только тогда, когда x и y принадлежат одному и тому же классу X_α. Обратно, если X представлено в виде дизъюнктного объединения $\bigsqcup_{\alpha \in A} X_\alpha$, то отношение "принадлежать одному и тому же множеству X_α" является отношением эквивалентности. В этом случае множество индексов A (или, что то же самое, множество классов эквивалентности $X_\alpha, \alpha \in A$) называется фактором X по отношению эквивалентности и обозначается $X/\sim$.

В описанной ситуации определено отображение (*проекция на фактор*) $p : X \to A$, действующее по правилу: $p(x) = \alpha$, если $x \in X_\alpha$: поскольку объединение множеств X_α — это все X, и различные X_α не пересекаются, такое $\alpha \in A$ существует и единственно.

Если X — топологическое пространство, то на множестве индексов A ($= X/\sim$ в терминах отношения эквивалентности) определена топология, проективная относительно (единственного) отображения p. Если $V \subset A$ — произвольное подмножество, то $p^{-1}(V) = \bigcup_{\alpha \in V} X_\alpha$. Поэтому *множество* $V \subset A$ является открытым в построенной топологии, если объединение $\bigcup_{\alpha \in V} X_\alpha \subset X$ — открытое подмножество. Теорема 2 утверждает, что отображение $g : A \to Z$ непрерывно тогда и только тогда, когда непрерывна композиция $g \circ p : X \to Z$ (которая представляет собой отображение $X \to Z$, постоянное на каждом подмножестве X_α).

Пример 2. Пусть $X = S^1 \subset \mathbb{C} = \mathbb{R}^2$, как в примере 1, и пусть $n \in \mathbb{Z}_{>0}$. Введем на S^1 отношение эквивалентности: $z \sim w \Leftrightarrow z^n = w^n$ — иными словами, угол, образованный векторами z и w с вершиной в начале координат, кратен $2\pi/n$. Классы эквивалентности S^1 по этому отношению содержат n точек каждый: если z — одна из них, то остальные имеют вид $ze^{2\pi ik/n}$, $k = 1, \dots, n-1$. Обозначим $p : S^1 \to S^1/\sim$ отображение стандартной проекции на фактор-пространство. Отображение p непрерывно согласно теореме 2; также оно открыто (образ открытого множества открыт) — это доказывается так же, как открытость f в примере 1 (проделайте!).

Докажем, что фактор-пространство $S^1/\sim$ гомеоморфно S^1. Отображение $g \stackrel{\text{def}}{=} p \circ f : S^1 \to S^1/\sim$, где $f : S^1 \to S^1$ — отображение из примера 1, непрерывно (как композиция непрерывных) и взаимно однозначно; докажем, что $g^{-1} : S^1/\sim \to S^1$ также непрерывно.

Для этого рассмотрим открытое подмножество $V \subset S^1$. Согласно примеру 1, образ $f(V) \subset S^1$ открыт. Мы уже упоминали выше, что отображение p открыто; отсюда вытекает, что $(g^{-1})^{-1}(V) = g(V) = p(f(V)) \subset S^1/\sim$ открыто. Следовательно, g^{-1} непрерывно, и $g : S^1 \to S^1/\sim$ — гомеоморфизм.

5. **Произведения пространств.** Пусть вначале $X_1, \dots, X_n$ — произвольные множества; тогда их декартовым произведением $Y \stackrel{\text{def}}{=} X_1 \times \dots \times X_n$ называется множество всех конечных последовательностей $(x_1, \dots, x_n)$, где $x_i \in X_i$ для всех $i = 1, \dots, n$. Существуют естественные отображения проекции $p_i : Y \to X_i$, $i = 1, \dots, n$, действующие по правилу $p_i(x_1, \dots, x_n) = x_i$.

Это определение имеет обобщение на случай, когда семейство множеств $\{X_\alpha \mid \alpha \in A\}$ — бесконечное (и даже несчетное). А именно, $Y \stackrel{\text{def}}{=} \times_{\alpha \in A} X_\alpha$ определяется как множество отображений $f : A \to \bigcup_{\alpha \in A} X_\alpha$ таких, что $f)\alpha) \in X_\alpha$ при всех $\alpha \in A$. Отображения $p_\alpha : Y \to X_\alpha$ определяются формулой $p_\alpha(f) \stackrel{\text{def}}{=} f(\alpha)$.

Если все X_α — топологические пространства, то топология в их прямом произведении определяется как инъективная топология относительно отображений p_α, $\alpha \in A$.

Пример 3. Декартова степень $\mathbb{R}^n$ метрического пространства $\mathbb{R}$ с метрикой $d(x, y) = |x - y|$. Здесь предбазу топологии составляют множества $p_i^{-1}(U) = \mathbb{R} \times \dots \times U \times \dots \times \mathbb{R}$ (U на i-ом месте, $i = 1, \dots, n$), где $U \subset \mathbb{R}$ — произвольное открытое множество. База топологии, таким образом, это пересечения $p_1^{-1}(U_1) \cap \dots \cap p_n^{-1}(U_n)$, то есть декартовы произведения $U_1 \times \dots \times U_n$, где $U_1, \dots, U_n \subset \mathbb{R}$ открыты. Согласно теореме 1, отображение $f : X \to \mathbb{R}^n$ непрерывно тогда и только тогда, когда непрерывны все композиции $p_i \circ f : X \to \mathbb{R}$ — иными словами, отображение, заданное формулой $f(x) = (f_1(x), \dots, f_n(x))$, непрерывно тогда и только тогда, когда непрерывны все функции $f_i(x)$. В отличие от этого, непрерывность отображений $f : \mathbb{R}^n \to X$ не сводится к непрерывности каких-либо функций; соответствующие примеры известны из курса анализа.

Пример 4. Пусть $X = \{0, 1\}$ — пространство из двух точек с дискретной топологией, а $C = X^{\mathbb{N}}$ — счетная декартова степень пространства X. Как множество, C состоит из всевозможных последовательностей $(x_1, x_2, \dots)$ нулей и единиц. Предбазу топологии составляют множества $U_i^0 = \{x \mid x_i = 0\}$ и $U_i^1 = \{x \mid x_i = 1\}$, $i = 1, 2, \dots$, а базу — множества $U(\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n) = \{x \mid x_1 = \varepsilon_1, \dots, x_n = \varepsilon_n\}$ для всевозможных $n = 1, 2, \dots$ и $\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n \in \{0, 1\}$.

Заметим, что все множества базы $U(\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n)$ бесконечны (и несчетны), откуда следует, что и все непустые открытые множества в C — объединения базовых — также бесконечны и несчетны. Отсюда вытекает, что, в отличие от конечных произведений, топология в C не дискретна и, более того, не содержит изолированных точек (одноточечные множества не могут быть открытыми).

Пусть теперь $K \subset [0, 1]$ — канторово множество, т.е. множество всех действительных чисел, представимых в виде конечной или бесконечной суммы $\sum_k \frac{2}{3^{n_k}}$, где $n_1 < n_2 < \dots$. Числа вида $m/3^n$, $m, n = 0, 1, 2, \dots$, образуют плотное множество на отрезке $[0, 1]$, откуда следует, что пересечение интервалов вида $I_{mn} = (m/3^n, (m+1)/3^n)$ с канторовым множеством — база топологии в нем. Рассмотрим теперь отображение $f : C \to K$, заданное формулой $f(x) = 2\sum_{n=1}^{\infty} x_n/3^n$. Очевидно, оно взаимно однозначное. Как нетрудно видеть, $f(U(\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n)) = I_{mn} \cap K$, где $m = 2\sum_{k=1}^{n} \varepsilon_k 3^{n-k}$. Из этого следует, что отображение $f^{-1} : K \to C$ непрерывно. Аналогично доказывается (проделайте!), что непрерывно отображение f. Значит, $f : C \to K$ — гомеоморфизм, и счетная степень двухточечного дискретного пространства гомеоморфна канторову множеству.