ЛЕКЦИЯ 4

Аннотация. Связные и линейно связные пространства. Гомотопическая категория и гомотопическая эквивалентность.

1. **Связность и линейная связность.** Топологическое пространство X называется *несвязным*, если оно содержит непустое открытое множество $U \subset X$, дополнение $X \setminus U$ к которому тоже непустое и открытое (иными словами, U одновременно открыто и замкнуто и при этом отлично от и X). Если такого подмножества U нет, то X называется связным.

Очевидно, связность — топологическое свойство: если два пространства гомеоморфны, то они либо оба связны, либо оба несвязны.

Пример 1. Пространство с дискретной топологией, содержащее более одной точки, несвязно.

Пример 2. Множество рациональных чисел $\mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$ (с индуцированной топологией) несвязно: $U = \mathbb{Q} \cap (-\infty, c)$ открыто для всякого $c \in \mathbb{R}$, а если c иррационально, то $\mathbb{Q} \setminus U = \mathbb{Q} \cap (c, +\infty)$ также открыто. Аналогично доказывается (проделайте!), что канторово множество несвязно.

Пример 3. Пространство из двух точек $X = \{a, b\}$, в котором открыты множества $\varnothing$, $\{a\}$ и X, связно.

Теорема 1. *Топологическое пространство X несвязно тогда и только тогда, когда существует непрерывное отображение $f : X \to \{0, 1\}$ в двухточечное дискретное пространство, отличное от постоянного (т.е. образ которого совпадает со всем $\{0, 1\}$).*

Доказательство. Если $U \subset X$ — непустое открытое множество, дополнение которого $X \setminus U$ непусто и открыто, то отображение $f : X \to \{0, 1\}$, заданное формулой $f(x) = 0$, если $x \in U$, и $f(x) = 1$, если $x \in X \setminus U$, непрерывно: $f^{-1}(\{0\}) = U$ и $f^{-1}(\{1\}) = X \setminus U$ открыты. Обратно, если такое отображение существует, то $U \stackrel{\text{def}}{=} f^{-1}(\{0\})$ — непустое открытое множество, дополнение которого $X \setminus U = f^{-1}(\{1\})$ также непусто и открыто. □

Пример 4. Отрезок $[a, b] \subset \mathbb{R}$ связен. Действительно, если это не так, то согласно теореме 1 существует непостоянное непрерывное отображение (функция) $f : [a, b] \to \{0, 1\} \subset \mathbb{R}$. Но существование такой функции f противоречит теореме о промежуточном значении.

Теорема 2.
(1) *Пусть X — топологическое пространство, и $X = A \cup B$, причем пространства A, B связные (в топологии подмножества), и $A \cap B \neq \varnothing$. Тогда X связно.*
(2) *Образ связного пространства при непрерывном отображении связен.*

Доказательство. Пусть $U \subset X = A \cup B$ — открытое непустое множество, и $V = X \setminus U$ тоже непусто и открыто. Множества $U \cap A$ и $V \cap A$ открыты в топологии A и их объединение — все A. В силу связности A одно из них должно быть пусто, а другое — совпадать с A; положим для определенности $U \cap A = \varnothing$ и $V \cap A = A$, то есть $A \subset V$. Поскольку A и B пересекаются, в B имеется элемент из $V \supset A$, так что $B \cap V \neq \varnothing$. В силу связности B получаем $B \cap U = \varnothing$, так что $B \subset V$. Но тогда $X = A \cup B \subset V$, и $U = \varnothing$ вопреки выбору. Тем самым доказано утверждение 1.

Пусть теперь $f : X \to Y$ — непрерывное отображение, и $f(X) \subset Y$ несвязно (в индуцированной топологии). Это означает, что существуют открытые множества $U, V \subset Y$ такие, что $U \cap V \cap f(X) = \varnothing$, $f(X) \subset U \cup V$, но $f(X) \not\subset U$ и $f(X) \not\subset V$. Следовательно, $f^{-1}(U) \subset X$ и $f^{-1}(V) \subset X$ открыты, непусты, $f^{-1}(U) \cap f^{-1}(V) = \varnothing$ и $f^{-1}(U) \cup f^{-1}(V) = X$, что противоречит связности X. □

Пример 5. Буквы X и У — объединения пересекающихся отрезков и, следовательно, связны. Тем самым они не гомеоморфны букве Й, которая несвязна (почему?). Друг другу они тоже не гомеоморфны: в букве X имеются 4 точки (концы линий), удаление которых оставляет пространство линейно связным, а в букве У таких точек только 3.

Определение 1. Топологическое пространство X называется *линейно связным*, если любые его точки a и b можно соединить непрерывной кривой — иными словами, существует непрерывное отображение $f : [0, 1] \to X$ такое, что $f(0) = a$ и $f(1) = b$.

Теорема 3. *Линейно связное пространство связно.*

Доказательство. Пусть X линейно связно, но не связно, и $U \subset X$ — непустое открытое подмножество с непустым открытым дополнением. Рассмотрим непрерывную кривую $f : [0,1] \to X$, соединяющую точки $a = f(0) \in U$ и $b = f(1) \in X \setminus U$. Прообразы $f^{-1}(U) \subset [0,1]$ и $f^{-1}(X \setminus U) \subset [0,1]$ открыты (в силу непрерывности f), непусты (один содержит 0, другой 1), не пересекаются и в объединении составляют весь отрезок $[0,1]$. Но существование таких множеств противоречит связности $[0,1]$. □

Пример 6. Пространство $\mathbb{R}^n$ (для всякого n) линейно связно: точки $a, b \in \mathbb{R}^n$ можно соединить кривой $f(t) = tb + (1-t)a$.

Теорема 4. *Теорема 2 остается верной, если в ней все слова "связно" (и в условии, и в заключении) заменить на "линейно связно".*

Доказательство — легкое упражнение (это даже проще, чем сама теорема 2).

Пример 7. Пусть $A = S^1 \subset \mathbb{R}^2$ — единичная окружность с центром в нуле, а $B \subset \mathbb{R}^2$ — спираль, лежащая в открытом единичном круге $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ с тем же центром и наматывающаяся на A изнутри, делая при этом бесконечное число оборотов. Например, в качестве B можно взять образ отображения $f : [0, +\infty) \to \mathbb{R}^2$, заданного в полярных координатах равенством $f(t) = (t/(t+1), t)$ (первая координата — радиус, вторая — угол).

Очевидно, A и B линейно связны (спираль B — непрерывный образ луча $[0, +\infty)$; про окружность A докажите самостоятельно) и, следовательно, связны. Круг $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ открыт — следовательно, $B = (A \cup B) \cap \Omega \subset A \cup B$ открыто в индуцированной топологии; соответственно, $A \subset A \cup B$ замкнуто.

Докажем, что $X = A \cup B$ — связное пространство (в индуцированной из $\mathbb{R}^2$ топологии). Пусть это не так, и $U \subset X$ открыто, замкнуто и содержит точку $a \in A$. По определению, $U = X \cap W$, где $W \subset \mathbb{R}^2$ открыто и, следовательно, содержит некоторый круг с центром в точке A. Этот круг пересекается с B (любая точка $a \in A$ — предельная точка спирали B), поэтому $U \cap B$ непусто. Но тогда $(X \setminus U) \cap B = \varnothing$ в силу связности B, так что $B \subset U$. Аналогично $(X \subset U) \cap A = \varnothing$ ввиду связности A, так что $A \subset U$. Но это означает, что $U = X$ и $X \setminus U$ пусто, вопреки выбору U.

Докажем теперь, что X не является линейно связным. Действительно, пусть $f : [0,1] \to X$ — кривая, причем $f(0) \stackrel{\text{def}}{=} a \in A$, а $f(1) \stackrel{\text{def}}{=} b \in B$. Как мы знаем, $A \subset X$ замкнуто, поэтому $f^{-1}(A) \subset [0,1]$ также замкнуто и, в частности, содержит свою верхнюю грань $u = \sup f^{-1}(A)$. Тем самым $u = \max\{t \in [0,1] \mid f(t) \in A\}$; при этом $u < 1$, т.к. $f(1) \in B$. Таким образом $f(t) \in B$, если $u < t \le 1$.

В силу непрерывности f для любого $\varepsilon > 0$ существует $\delta > 0$ такое, что если $u < t < u + \delta$, то $f(t)$ лежит в круге радиуса ε с центром в точке $c = f(u) \in A$. Пересечение f с таким кругом линейно несвязно для любого достаточно малого ε — более того, состоит из бесконечного числа непересекающихся линейно связных подмножеств, одно из которых лежит в A (дуга окружности), а остальные — в B (дуги — отрезки витков спирали). Согласно теореме 4, все точки $f(t)$ при $u < t < u + \delta$ лежат в одной из таких дуг. Но никакая из этих дуг не имеет предельных точек, принадлежащих A (расстояние между точками A и точками данной дуги ограничено снизу положительным числом). При этом в силу непрерывности f имеем $\lim_{s \to +0} f(u+s) = f(u) = c \in A$ — противоречие.

Тем самым X — пример связного, но линейно несвязного пространства.

2. Гомотопическая категория.

Определение 2. Непрерывные отображения $f_0 : X \to Y$ и $f_1 : X \to Y$ называются *гомотопными* (обозначение $f_0 \sim f_1$), если существует непрерывное отображение $F : X \times [0,1] \to Y$ (называемое *гомотопией*), для которого $F(x, 0) = f_0(x)$ и $F(x, 1) = f_1(x)$ для всех $x \in X$.

Часто пишут $f_t(x) \stackrel{\text{def}}{=} F(x, t)$. Неформально говоря, гомотопия это "непрерывная деформация" отображения f_0 в отображение f_1; параметр деформации t пробегает отрезок $[0,1]$.

Пример 8. Пусть, как обычно, $S^1 = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| = 1\}$ — окружность единичного радиуса с центром в нуле. Центральная симметрия — отображение $f : S^1 \to S^1$, заданное равенством $f_0(z) = -z$, — гомотопно тождественному отображению. Гомотопия задается формулой $f_t(z) = F(z, t) = -e^{\pi i t} z$ и представляет собой семейство поворотов ($f_t : S^1 \to S^1$ — поворот на угол $\pi(1+t)$).

Симметрия относительно вещественной оси — отображение $h : S^1 \to S^1$, заданное равенством $h(z) = \bar{z}$, — тождественному отображению не гомотопна, но мы пока не готовы это доказать.

Пример 9. Произвольное отображение $f_1 : X \to \mathbb{R}^n$ (где X — произвольное пространство) гомотопно отображению f_0, переводящему все точки в 0. Гомотопия имеет вид $f_t(x) = tx$, $0 \le t \le 1$, $x \in X$.

Теорема 5. (1) *Отношение гомотопности отображений рефлексивно, симметрично и транзитивно.*

(2) *Если $f_0 \sim f_1 : X \to Y$ и $g_0 \sim g_1 : Y \to Z$, то $g_0 \circ f_0 \sim g_1 \circ f_1 : X \to Z$.*

Доказательство. Рефлексивность: пусть $f : X \to Y$ — непрерывное отображение. Гомотопия $F(x,t) \stackrel{\text{def}}{=} f(x)$ доказывает, что $f \sim f$.

Симметричность: если гомотопия $F(x,t)$ соединяет $f_0 \stackrel{\text{def}}{=} F(\cdot,0)$ с $f_1 \stackrel{\text{def}}{=} F(\cdot,1)$, то гомотопия $\tilde{F}(x,t) \stackrel{\text{def}}{=} F(x,1-t)$ (подумайте, почему она непрерывна!) соединяет f_1 с f_0.

Транзитивность: пусть $f \sim g \sim h : X \to Y$, и F — гомотопия, соединяющая $f = F(\cdot,0)$ с $g = F(\cdot,1)$, а G — гомотопия, соединяющая $g = G(\cdot,0)$ с $h = G(\cdot,1)$. Определим отображение $H : X \times [0,1] \to Y$ формулой $H(x,t) = \begin{cases} F(x,2t), & 0 \le t \le 1/2, \\ G(x,2t-1), & 1/2 \le t \le 1 \end{cases}$ (докажите, что это непрерывное отображение!). Тогда $H(\cdot,0) = F(\cdot,0) = f$ и $H(\cdot,1) = G(\cdot,1) = h$.

Композиция: если гомотопия f_t соединяет отображение f_0 с f_1, а гомотопия g_t — отображение g_0 с g_1, то гомотопия $g_t \circ f_t$ соединяет $g_0 \circ f_0$ с $g_1 \circ f_1$. □

Согласно утверждению 1 теоремы 5, множество непрерывных отображений $X \to Y$ разделяется на классы эквивалентности (классы гомотопных отображений). Множество классов гомотопных отображений $X \to Y$ обозначется $\mathrm{Hom}(X,Y)$.

Пример 10. Пусть $*$ — топологическое пространство из одной точки, а X — произвольное топологическое пространство. Множество отображений $* \to X$ естественно отождествляется с множеством точек пространства X. В этом случае гомотопия отображений $* \to X$ — непрерывное отображение $[0,1] \to X$, то есть непрерывная кривая в X. Классы гомотопии здесь называются *компонентами линейной связности* пространства X; если X линейно связно, то такой класс только один.

Утверждение 2 теоремы 5 позволяет ввести на множествах Hom операцию композиции следующим образом: пусть $\alpha \in \mathrm{Hom}(X,Y)$, $\beta \in \mathrm{Hom}(Y,Z)$ — классы гомотопных отображений, и пусть $f \in \alpha$, $g \in \beta$ — какие-нибудь представители этих классов (отображения $X \to Y$ и $Y \to Z$ соответственно). Обозначим $\gamma = \beta \circ \alpha \in \mathrm{Hom}(X,Z)$ класс гомотопных отображений, которому принадлежит отображение $g \circ f : X \to Z$. Согласно утверждению 2, класс γ определен однозначно, то есть не зависит от выбора отображений $f \in \alpha$ и $g \in \beta$. (Действительно, если $f' \in \alpha$, $g' \in \beta$ — другие представители тех же классов, то $f \sim f'$, $g \sim g'$ и, следовательно, $g' \circ f' \sim g \circ f$, то есть $g' \circ f'$ принадлежит тому же классу γ.)

Из ассоциативности композиции отображений немедленно следует, что композиция классов гомотопии тоже ассоциативна. Это позволят определить *гомотопическую категорию* **Hom**, объекты которой — топологические пространства, а множество морфизмов из объекта X в объект Y — множество $\mathrm{Hom}(X,Y)$. Композиция морфизмов — введенная выше композиция классов гомотопии, а тождественный морфизм $\mathrm{id}_X \in \mathrm{Hom}(X,X)$ — класс гомотопии, которому принадлежит тождественное отображение $X \to X$.

Эквивалентность в категории **Hom** называется гомотопической эквивалентностью. Иными словами, топологические пространства X и Y гомотопически эквивалентны, если существуют взаимно обратные относительно композиции классы гомотопии $\alpha \in \mathrm{Hom}(X,Y)$ и $\beta \in \mathrm{Hom}(Y,X)$ — то есть существуют непрерывные отображения $f : X \to Y$ и $g : Y \to X$ такие, что $f \circ g \sim \mathrm{id}_Y$ и $g \circ f \sim \mathrm{id}_X$.

Топологическое пространство X, гомотопически эквивалентное пространству $*$ из одной точки, называется *стягиваемым.* Существует только одно отображение $f : X \to *$, а отображения $g : * \to X$ взаимно однозначно соответствуют точкам пространства $x \in X$ (ср. пример 10): $g = g_x$. Композиция $f \circ g_x = \mathrm{id}_*$ всегда, а $g_x \circ f : X \to X$ — отображение, переводящее все точки пространства X в точку x. Таким образом, X стягиваемо тогда и только тогда, когда такое отображение гомотопно тождественному.

Пример 11. Из примера 9 выше следует, что пространство $\mathbb{R}^n$ стягиваемо. Если доказать, что осевая симметрия окружности не гомотопна ее тождественному отображению (см. пример 8), то отсюда последует, что окружность нестягиваема: если два объекта категории эквивалентны, то между множеством морфизмов из любого объекта в них (а также из них в любой объект) существует взаимно однозначное соответствие (подумайте, какое). Но множество классов гомотопии $\mathrm{Hom}(S^1,*)$ состоит из одного элемента, а $\mathrm{Hom}(S^1,S^1)$ — по крайней мере из двух (на самом деле $\mathrm{Hom}(S^1,S^1)$ — бесконечное счетное множество, но это мы докажем позднее).

Из примера 11 вытекает, что категория **Hom** не является конкретной: $\mathbb{R}^n$ и $*$ гомотопически эквивалентны, но не равномощны, то есть не эквивалентны как объекты категории **Set**.

Теорема 6. *Пространство, гомотопически эквивалентное связному, связно. Пространство, гомотопически эквивалентное линейно связному, линейно связно.*

Доказательство. Пусть $X \sim Y$, X связно, а Y нет. Пусть $f : X \to Y$ и $g : Y \to X$ — непрерывные отображения такие, что $h_0 \stackrel{\text{def}}{=} f \circ g \sim h_1 \stackrel{\text{def}}{=} \mathrm{id}_Y$; гомотопию обозначим h_t. Согласно теореме 1, существует непрерывное непостоянное отображение $\varphi : Y \to \{0,1\}$. Согласно теореме 2, образ $f(X) \subset Y$ связен, откуда в силу той же теоремы 1 (или той же теоремы 2) ограничение $\varphi|_{f(X)}$ — константа. Рассмотрим теперь гомотопию $\varphi \circ h_t : Y \to \{0,1\}$. Поскольку $h_0(Y) = f(g(Y)) \subset f(X)$, отображение $\varphi \circ h_0$ — константа. Но $h_1 = \mathrm{id}_Y$, так что $\varphi \circ h_1 = \varphi$ — не константа. В то же время для произвольной точки $y \in Y$ отображение

$\varphi \circ h_t(y)$ это отображение отрезка $[0,1]$ — связного пространства — в $\{0,1\}$, то есть константа. Отсюда следует, что образ $\varphi \circ h_1$ совпадает с образом $\varphi \circ h_0$ — противоречие.

Пусть теперь пространства X и Y гомотопически эквивалентны, и X линейно связно. Тогда, как обсуждалось в примере 10, множество $\mathrm{Hom}(*, X)$ содержит единственный элемент. Рассуждая, как в примере 11, получим, что $\mathrm{Hom}(*, Y)$ также состоит из одного элемента, то есть Y линейно связно. $\square$