ЛЕКЦИЯ 6

Аннотация. Компактность.

Пусть X — множество. Множество его подмножеств $\mathfrak{U} = \{U_\alpha \subset X \mid \alpha \in \mathfrak{A}\}$ (где $\mathfrak{A}$ — произвольное множество индексов) называется *покрытием* X, если $\bigcup_{\alpha\in\mathfrak{A}} U_\alpha = X$. Если $\mathfrak{U}_1 \subset \mathfrak{U}_2$ (то есть каждое множество, входящее в покрытие $\mathfrak{U}_1$, входит также и в $\mathfrak{U}_2$), то $\mathfrak{U}_1$ называют подпокрытием $\mathfrak{U}_2$.

Топологическое пространство X называется *компактным* (или *компактом*), если для у любого его покрытия открытыми подмножествами имеется конечное подпокрытие.

Пример 1. Любое конечное топологическое пространство, очевидно, компактно.

Пример 2 (известный из курса анализа). Отрезок $[0,1]$ — компакт. Для доказательства возьмем покрытие $\mathfrak{U} = \{U_\alpha\}$ и рассмотрим множество T таких $t \in [0,1]$, что существует конечное подмножество $\{U_{\alpha_1}, \dots, U_{\alpha_N}\}$, для которого $[0,t] \subset U_{\alpha_1} \cup \dots \cup U_{\alpha_N}$. Очевидно, $0 \in T$. Множество T открыто: если $t \in T$, то существует i такое, что $t \in U_{\alpha_i}$. В силу открытости U_{α_i} содержит интервал $(t-\varepsilon, t+\varepsilon)$; но тогда $(t-\varepsilon, t+\varepsilon) \subset T$. Также очевидно, что если $t \in T$ и $0 \le t' \le t$, то $t' \in T$.

Рассмотрим число $t_* = \sup T$ и докажем, что $t_* \in T$. Поскольку $\bigcup_{\alpha in \mathfrak{A}} = [0,1]$, существует $\beta \in \mathfrak{A}$ такое, что $t_* \in U_\beta$. В силу открытости U_β существует $\varepsilon > 0$ такое, что $(t_*-\varepsilon, t_*+\varepsilon) \subset U_\beta$. В силу выбора t_* существуют $\alpha_1, \dots, \alpha_N$ такие, что $[0, t_*-\varepsilon/2] \subset U_{\alpha_1} \cup \dots \cup U_{\alpha_N}$. Но тогда $[0,t_*] \subset U_{\alpha_1} \cup \dots \cup U_{\alpha_N} \cup U_\beta$, откуда $t_* \in T$.

Следовательно, $T \subset [0,1]$ — отрезок и одновременно непустое открытое подмножество, то есть $T = [0,1]$.

Пример 3. Прямая $\mathbb{R}^n$ — некомпактное пространство. Действительно, $\mathbb{R} = \bigcup_{n\in\mathbb{N}}(-n,n)$, но объединение любого конечного множества интервалов ограничено и, следовательно, не совпадает с $\mathbb{R}$.

Обобщением этого примера является

Теорема 1. *Если метрическое пространство компактно, то оно ограничено.*

Доказательство. Пусть M — компактное метрическое пространсво и $a \in M$. Тогда $M = \bigcup_{r>0} B_r(a)$ (объединение всех шаров с центром a). В силу компактности найдется множество $0 < r_1 < \dots < r_N$ такое, что $M = B_{r_1}(a) \cup \dots \cup B_{r_N}(a) = B_{r_N}(a)$, что и означает ограниченность. □

Множество примеров позволяет генерировать

Теорема 2. *Замкнутое подмножество компакта — компакт (в индуцированной топологии).*

(Например, канторово множество $C \subset [0,1]$ — компакт.)

Доказательство. Пусть X — компакт, а $K \subset X$ замкнуто. Пусть $U_\alpha, \alpha \in \mathfrak{A}$ — открытые подмножества в индуцированной топологии, для которых $K = \bigcup_{\alpha\in\mathfrak{A}} U_\alpha$. Это означает, что каждое $U_\alpha = K \cap V_\alpha$, где $V_\alpha \subset X$ открыты и $K \subset \bigcup_{\alpha\in\mathfrak{A}} V_\alpha$. Но $V \stackrel{\text{def}}{=} X \setminus K$ открыто, и $V \cup \bigcup_{\alpha\in\mathfrak{A}} V_\alpha = X$, что в силу компактности X означает существование $\alpha_1, \dots, \alpha_N$ таких, что $X = V \cup V_{\alpha_1} \cup \dots \cup V_{\alpha_N}$ Но тогда $K = U_{\alpha_1} \cup \dots \cup U_{\alpha_N}$, и компактность доказана. □

Обратное утверждение верно, если объемлющий компакт X хаусдорфов:

Теорема 3. *Пусть X компактно и хаусдорфово, а $K \subset X$ компактно (в индуцированной топологии). Тогда $K \subset X$ замкнуто.*

Доказательство. Для произвольных $a \in K, b \notin K$ существуют, в силу хаусдорфовости, открытые множества $U_{ab} \ni a$ и $V_{ab} \ni b$ такие, что $U_{ab} \cap V_{ab} = \varnothing$. Объединение $\bigcup_{a\in K} U_{ab}$ содержит K; в силу компактности K это означает, что существуют $a_1, \dots, a_N \in K$ такие, что $K \subset U_{a_1 b} \cup \dots \cup U_{a_N b}$. Множество $W_b \stackrel{\text{def}}{=} V_{a_1 b} \cap \dots \cap V_{a_N b}$ открыто (конечное пересечение открытых), содержит b и не пересекается с K. Тогда $X \setminus K = \bigcup_{b \in X\setminus K} W_b$ открыто (как объединение открытых) и, следовательно, K замкнуто. □

Следствие 1 (известное из курса анализа)**.** *Компактное метрическое пространство полно.*

Доказательство. Пусть M — компактное метрическое пространство, а $\bar{M}$ — его пополнение. $\bar{M}$ — метрическое пространство и, следовательно, хаусдорфово. Согласно теореме 3, $M \subset \bar{M}$ замкнуто. С другой стороны, $M \subset \bar{M}$ — плотное подмножество ($\bar{M}$ — его замыкание). Это и означает, что $M = \bar{M}$ полно. □

Свойств из теоремы 1 и следствия 1, даже выполненных одновременно, недостаточно для компактности метрического пространства:

Пример 4. Пусть $M = C[0,1]$ — пространство непрерывных функций $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ с метрикой $d(f,g) = \max_{t\in[0,1]} |f(t) - g(t)|$ (проверьте, что это на самом деле метрика!). Сходимость в пространстве $C[0,1]$ это равномерная сходимость на отрезке $[0,1]$.

Пространство $C[0,1]$ полно. Действительно, пусть $f_n \in C[0,1]$ — фундаментальная последовательность функций: $\lim_{m,n\to\infty} \max_{t\in[0,1]} |f_n(t) - f_m(t)| = 0$. Тогда для каждого $t \in [0,1]$ числовая последовательность $f_n(t)$ фундаментальна и, следовательно, сходится ($\mathbb{R}$ — полное пространство): $\lim_{n\to\infty} f_n(t) \stackrel{\text{def}}{=} f(t)$. Покажем, что сходимость в последнем равенстве равномерна по $t \in [0,1]$. Поскольку $f_n(0) \to f(0)$, для любого $\varepsilon > 0$ существует N такое, что при $n > N$ имеют место неравенства $|f_n(0) - f(0)| < \varepsilon/2$ и $\sup_{m>n} \sup_{t\in[0,1]} |f_n(t) - f_m(t)| \le \varepsilon/2$. Из этого вытекает, что для всякого $t \in T$ имеет место неравенство $|f_n(t) - f(t)| < \varepsilon$, что и означает равномерную сходимость.

Тем самым $f_n(t) \to f(t)$ при $n \to \infty$ равномерно по $t \in [0,1]$. Следовательно, функция f непрерывна, то есть $\lim_{n\to\infty} f_n = f$ в пространстве $C[0,1]$, то есть $C[0,1]$ полно. Любое замкнутое подмножество $C[0,1]$ также полно (почему?) — в частности, шар $\overline{B}_1(0) \stackrel{\text{def}}{=} \{f \in C[0,1] \mid \forall t \in [0,1]\ |f(t)| \le 1\}$ ограничен и полон.

Он, однако, некомпактен. Для доказательства рассмотрим кусочно-линейную функцию $f_0(t)$, заданную равенством $f_0(t) = \begin{cases} 1 - 6\,|t - 1/2|\,, & 1/3 \le t \le 2/3, \\ 0 & \text{иначе.} \end{cases}$ Очевидно, f непрерывна, то есть лежит в $C[0,1]$. Определим теперь последовательность кусочно-линейных функций $f_n \in C[0,1]$ формулой
$f_1(t) = \begin{cases} f_0(3^n t), & 0 \le t \le 1/3^n, \\ f_0(3^n(1-t)), & 1 - 1/3^n \le t \le 1, \\ 0 & \text{иначе.} \end{cases}$ Тогда $d(f_n, f_m) = 1$ при всех m, n (докажите!). Отсюда вытекает, что множество $F = \{f_1, f_2, \dots\} \subset \overline{B}_1(0)$ замкнуто (поскольку не имеет вообще предельных точек), а его дополнение $V = \overline{B}_1(0) \setminus F$, соответственно, открыто. Пусть $U_n = B_{1/2}(f_n)$ — открытый шар радиуса $1/2$ с центром в f_n. Тогда $\overline{B}_1(0) = V \cup U_1 \cup U_2 \cup \dots$. Для всякого n точка f_n принадлежит U_n и не принадлежит никакому другому множеству U_m, а также V. Это означает, что покрытие $\{V, U_1, U_2, \dots\}$ шара $\overline{B}_1(0)$ вообще не имеет собственных подпокрытий (ни одно множество из покрытия нельзя выкинуть), в том числе и конечных.

Компактные пространства “хорошо ведут себя” при непрерывных отображениях:

Теорема 4. *Образ компакта при непрерывном отображении — компакт.*

Доказательство. Пусть X — компакт, а $f : X \to Y$ — непрерывное отображение. Пусть $U_\alpha \subset f(X)$, $\alpha \in \mathfrak{A}$, — открытые подмножества (в топологии, индуцированной из $Y \supset f(X)$), причем $\bigcup_{\alpha\in\mathfrak{A}} U_\alpha = f(X)$. Это означает, что $U_\alpha = f(X) \cap V_\alpha$, где $V_\alpha \subset Y$ открыто и $f(X) \subset \bigcup_{\alpha\in\mathfrak{A}} V_\alpha$. Множества $W_\alpha = f^{-1}(U_\alpha) = f^{-1}(V_\alpha) =\subset X$ открыты в силу непрерывности f, и $\bigcup_{\alpha\in\mathfrak{A}} W_\alpha = X$. В силу компактности $X = W_{\alpha_1} \cup \dots \cup W_{\alpha_N}$, что означает $f(X) = U_{\alpha_1} \cup \dots \cup U_{\alpha_N}$. □

Из теоремы 4 вытекает, в частности, что если $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ — непрерывная функция, то $f([a,b]) \subset \mathbb{R}$ — компакт и, следовательно, ограничен (теорема 1) и замкнут (теорема 3). В частности, $f([a,b])$ содержит свою точную верхнюю и нижнюю грань — функция, непрерывная на отрезке, достигает своего максимума и минимума.

Теорема 5 (теорема Тихонова)**.** *Пусть X_α, $\alpha \in A$ — компакты. Тогда их декартово произведение $\prod_{\alpha\in A} X_\alpha$ — компакт.*

(Например, канторово множество $C = \prod_{i=1}^{\infty} \{0,1\}$ компактно.)

Подчеркнем, что множество индексов A может быть бесконечно и любой мощности.

Пусть X — топологическое пространство с базой топологии $\mathcal{B}$ и предбазой $\mathcal{P}$.

Лемма 1. *Пространство X компактно тогда и только тогда, когда из любого его покрытия элементами базы можно выбрать конечное подпокрытие.*

Доказательство. В одну сторону лемма очевидна (элементы базы — открытые множества). В другую: пусть $\{U_\alpha \mid \alpha \in \mathfrak{A}\}$ — покрытие X открытыми множествами. По определению базы $U_\alpha = \bigcup_{\beta\in A_\alpha} B_{\alpha\beta}$, где $B_{\alpha\beta}$ — элементы базы. Тогда множество $\bigcup_{\alpha\in\mathfrak{A}} \{B_{\alpha\beta} \mid \beta \in A_\alpha\}$ — покрытие X элементами базы и, следовательно, содержит конечное подпокрытие: $X = B_{\alpha_1\beta_1} \cup \dots \cup B_{\alpha_N\beta_N}$. Но $B_{\alpha\beta} \subset U_\alpha$ при всех α, β, так что $X = U_{\alpha_1} \cup \dots \cup U_{\alpha_N}$ — конечное подпокрытие. □

Более сложное утверждение — возможность обойтись элементами даже не базы, а предбазы:

Лемма 2 (теорема Александера о предбазе). *Пространство X компактно тогда и только тогда, когда из любого его покрытия элементами предбазы можно выбрать конечное подпокрытие.*

Доказательство. Опять-таки, в одну сторону теорема очевидна: элементы предбазы — открытые множества. Для доказательства в другую сторону воспользуемся леммой 1 и рассмотрим покрытие $\{B_\alpha \mid \alpha \in \mathfrak{A}\}$ пространства X элементами базы, то есть конечными пересечениями элементов предбазы: $B_\alpha = P_{\alpha,1} \cap \dots \cap P_{\alpha,N_\alpha}$.

Предположим, что X некомпактно и рассмотрим множество $\mathcal{X}$ его покрытий элементами базы, не содержащих конечных подпокрытий. Множество таких ("плохих") покрытий частично упорядочено по включению; докажем, что это частично упорядоченное множество удовлетворяет условиям леммы Цорна.

Пусть $\mathcal{Y} \subset \mathcal{X}$ — цепочка (линейно упорядоченное подмножество), то есть множество "плохих" покрытий такое, что из любых двух покрытий $\mathfrak{B}_1, \mathfrak{B}_2 \in \mathcal{Y}$ одно — подмножество другого. Рассмотрим объединение $\mathfrak{Y} = \bigcup_{\mathfrak{B} \in \mathcal{Y}} \mathfrak{B}$ и покажем, что это "плохое" прокрытие. Пусть это не так, и $B_1, \dots, B_N \in \mathfrak{Y}$ — конечное подпокрытие. По определению $\mathfrak{Y}$ существуют покрытия $\mathfrak{B}_\mathfrak{i} \in \mathcal{Y}$ такие, что $B_i \in \mathfrak{B}_\mathfrak{i}$ при $i = 1, \dots, N$. Поскольку $\mathcal{Y}$ — цепочка, покрытия $\mathfrak{B}_\mathfrak{i}$ вложены друг в друга, и можно без ограничения общности считать, что $\mathfrak{B}_\mathfrak{1} \subset \dots \subset \mathfrak{B}_\mathfrak{N}$. Но тогда $B_1, \dots, B_N$ — элементы покрытия $\mathfrak{B}_\mathfrak{N}$, которое тем самым содержит конечное подпокрытие, вопреки предположению.

Тем самым множество "плохих" покрытий удовлетворяет условию леммы Цорна (каждая цепочка ограничена сверху). В силу этой леммы в множестве имеется максимальный элемент — "плохое" покрытие $\mathfrak{B}_*$, которое становится хорошим при добавлении любого элемента базы. Покрытие $\mathfrak{B}_*$ может содержать элементы предбазы, которые, однако, не образуют покрытия — иначе по условию леммы $\mathfrak{B}_*$ содержало конечное подпокрытие. Тем самым существует точка $x \in X$ такая, что $x \in B_0 \in \mathfrak{B}_*$, и $B_0 = P_1 \cap \dots \cap P_N$, где P_i — элементы предбазы, но ни одно из множеств P_i в покрытие $\mathfrak{B}_*$ не входит. Отсюда вытекает, что для всякого $i = 1, \dots, N$ покрытие $\mathfrak{B}^{(i)} = \mathfrak{B}_* \cup \{P_i\}$ строго больше по включению, чем $\mathfrak{B}_*$ и, следовательно, содержит конечное подпокрытие $P_i, B_{i1}, \dots, B_{ik_i}$.

Множество $\bigcup_{i=1}^N \{B_{i1}, \dots, B_{ik_i}\} \cup \{B_0\}$ — покрытие. Действительно, если $x \notin \bigcup_{i=1}^N (B_{i1} \cup \dots \cup B_{ik_i})$, то $x \in P_i$ (поскольку $P_k, B_{i1}, \dots, B_{ik_i}$ — покрытие) для всех i и, следовательно, $x \in B_0 = P_1 \cap \dots \cap P_N$. Но тогда это множество — конечное подпокрытие $\mathfrak{B}_*$, что противоречит тому, что $\mathfrak{B}_*$ — "плохое" покрытие. $\square$

Пример 5. Пусть $\mathbb{F}$ — произвольное поле, $X = \mathbb{F}^n$. Рассмотрим в X топологию, предбазой которой являются множества $D(F) \stackrel{\text{def}}{=} \{(x \in \mathbb{F}^n \mid P(x) \neq 0\}$, где $P \in \mathbb{F}[x]$ — произвольный многочлен. (Эта топология — частный случай т. наз. топологии Зарисского на алгебраических многообразиях).

Покажем, что X компактно. Действительно, если $\bigcup_{F \in \mathfrak{A}} D(F) = X$, многочлены $F \in \mathfrak{A}$ не имеют общих нулей. Рассмотрим идеал $I_\mathfrak{A} \subset \mathbb{F}[x]$, порожденный всеми многочленами $F \in \mathfrak{A}$. Возьмем $F_1 \in \mathfrak{A}$; если порожденный им идеал $\langle F_1 \rangle \neq I_\mathfrak{A}$, то возьмем $F_2 \in \mathfrak{A}$ такой, что $F_2 \notin \langle F_1 \rangle$. Если $\langle F_1, F_2 \rangle \neq I_\mathfrak{A}$, возьмем F_3, и т.д. По теореме Гильберта о базисе любая возрастающая по включению последовательность идеалов в кольце $\mathbb{F}[x]$ стабилизируется. Следовательно, найдется N и набор многочленов $F_1, \dots, F_N$ такой, что $\langle F_1, \dots, F_N \rangle = I_\mathfrak{A}$. Но тогда многочлены $F_1, \dots, F_N$ не имеют общих нулей, и $X = D(F_1) \cup \dots \cup D(F_N)$. Компактность X теперь вытекает из теоремы Александера о предбазе.

Доказательство теоремы Тихонова. По теореме Александера достаточно доказать, что всякое покрытие $X = \prod_{\alpha \in \mathfrak{A}} X_\alpha$ элементами предбазы $\{p_\alpha^{-1}(U_\alpha)\}$ содержит конечное подпокрытие. Здесь $\alpha \in \mathfrak{A}$, $U_\alpha \in X_\alpha$ открыто, и $p_\alpha : X \to X_\alpha$ — проекция на сомножитель.

Действительно, пусть $X = \bigcup_{\alpha \in \mathfrak{A}} \bigcup_{\beta \in A_\alpha} p_\alpha^{-1}(U_{\alpha,\beta})$. Рассмотрим множества $Y_\alpha X_\alpha \setminus \bigcup_{\beta \in A_\alpha}$, $\alpha \in \mathfrak{A}$. Если все они непусты, то выберем $y_\alpha \in Y_\alpha$ для каждого α, и пусть $y \in X$ — элемент X, для которого $p_\alpha(y) = y_\alpha$ для всех $\alpha \in \mathfrak{A}$. Такой элемент, очевидно, не принадлежит $\bigcup_{\beta \in A_\alpha} p_\alpha^{-1}(U_{\alpha,\beta})$ при любом α, что противоречит тому, что $\{p_\alpha^{-1}(U_{\alpha,\beta})\}$ — покрытие.

Следовательно, существует $\alpha_0 \in \mathfrak{A}$ такое, что $\bigcup_{\beta \in A_{\alpha_0}} U_{\alpha_0,\beta} = X_{\alpha_0}$. Поскольку X_{α_0} компактно, это покрытие содержит конечное подпокрытие: $X_{\alpha_0} = U_{\alpha_0,\beta_1} \cup \dots \cup U_{\alpha_0,\beta_m}$. Но тогда $X = p_{\alpha_0}^{-1}(U_{\alpha_0,\beta_1}) \cup \dots \cup p_{\alpha_0}^{-1}(U_{\alpha_0,\beta_m})$ — конечное подпокрытие найдено. $\square$